CAPITOLO 4
LA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE E TRASCENDENTI

In questo capitolo inizieremo a mettere in pratica ciò che abbiamo imparato in precedenza allo scopo di acquisire strumenti di calcolo che ci diano modo di risolvere rapidamente diverse tipologie di equazioni e di sistemi di equazioni di tipo algebrico e trascendente .
Procederemo allo scopo per successivi gradi di difficoltà, alternando informazioni di carattere teorico ad esercizi di programmazione mirati alla soluzione dei nostri problemi; il lettore non si dovrà stupire se alcuni esercizi saranno molto semplici, essi costituiranno i mattoni con i quali costruire strutture più complesse.
La raccolta dei programmi che compileremo costituirà un piccolo archivio nel quale il lettore potrà ricercare, quando ne avrà la necessità, quanto di aiuto al proprio lavoro.

4.1 L' equazione algebrica di primo grado

Come è noto l'equazione algebrica di primo grado si presenta nella forma:

$$a x + b = 0$$

dalla quale si ricava con immediatezza la soluzione

$$x = - b / a$$

Per risolvere questo tipo di equazione mediante il Qbasic, anche se ciò è ovviamente superfluo, si procede alla compilazione del programma che riportiamo e commentiamo:

```
CLS ' pulizia dello schermo

INPUT " a = " ; a   ' richiesta di ingresso del coefficiente ( a ) dell'incognita x

INPUT " b = " ; b  ' richiesta di ingresso del termine noto ( b )

x= -( b / a )  ' calcolo del valore dell'incognita

PRINT " x = " ;  x  ' presentazione del valore che risolve l'equazione
```

Per risolvere ad esempio l'equazione $3x - 7 = 0$ si esegue il programma inserendo i dati richiesti

```
                F5
a = ? 3
b= ? -7
x = 2.333333
                F5
```

4.1.1 La soluzione grafica dell'equazione di primo grado

L'equazione di primo grado, risolta algebricamente nel paragrafo 4.1, è risolvibile con un certo grado di approssimazione anche per via grafica; l'esercizio richiesto per questa operazione, esposto a solo scopo didattico, è la base per significativi sviluppi che saranno oggetto del prosieguo del nostro studio.

Per affrontare il problema della soluzione grafica dell'equazione citata è necessario considerare detta equazione come un caso particolare della funzione di geometria analitica riguardante la retta; infatti tale funzione è esplicitata mediante l'espressione:

$$Y = m x + n$$

che per $Y = 0$ coincide con l'equazione di primo grado in x; in altre parole la soluzione dell'equazione di primo grado altro non è che il valore della variabile indipendente x che azzera la variabile dipendente Y, è cioè il punto in cui la retta interseca l'asse delle ascisse .
Se consideriamo ad esempio l'equazione $4x + 8 = 0$ questa è il caso particolare della funzione

$$Y = 4x + 8$$

in cui $m = +4$ ed $n = +8$.

Se tracciamo perciò il grafico della retta $Y = 4x + 8$ il valore dell'ascissa in cui la retta stessa incontra l'asse x risolve l'equazione data.
Vediamo come procedere per ottenere questo risultato:
E' necessario anzitutto stabilire l'impiego di un sistema di assi cartesiani calibrato e pertanto seguire la procedura indicata nel paragrafo 3.27:
a) in base alla natura della funzione si sceglie la presentazione cartesiana a 4 quadranti "sbloccando" la prima e la terza istruzione del programma di paragrafo 3.14
b) in base alla presentazione scelta si evidenziano il numero degli intervalli in cui sono divisi gli assi cartesiani: asse X = 10 intervalli asse Y = 10 intervalli
c) si fissano i valori del campo di variabilità della x in modo tale che la y corrispondente compia certamente una escursione dai valori negativi a quelli positivi: ciò si ottiene, a vista, per x che varia da -10 a +10, con questi valori si ha un adattamento automatico al numero degli intervalli stabiliti per la calibrazione della scala
d) si riporta il valore massimo del campo di variabilità di Y: 48, si sceglie un numero, superiore a 48,che sia un **intero divisibile per il numero degli intervalli**; nel nostro caso si sceglie il valore 50 ottenendo per gli intervalli il valore 50 / 10 = 5
e) si fissa l'incremento della variabile indipendente in .01
f) si riporta l'istruzione PSET relativa ai 4 quadranti **PSET (230 + k * x , 160 - k2 * y)**
g) si determina il coefficiente k in base al campo di variabilità fissato per la x in 10
k = 230 / 10 = 23
h) si determina il coefficiente k2 in base al nuovo semicampo fissato per y in 50
k2 = 160 / 50 = 3.2
i) sulla base dei punti f), g), h), si completa, in simbologia Qbasic, l'istruzione finale che ci consente di tracciare la nostra retta su scala calibrata, si aggiunge il colore giallo:

PSET (230 + 23 * x , 160 - 3.2 * (4 * x + 8)) ,14

l) si procede alla compilazione del programma aggiungendo le istruzioni LOCATE

```
LINE ( 0 , 160 ) - ( 460 , 160 ) ' comanda il tracciamento dell'asse delle ascisse (asse X)
                                  ' per coordinate a 2 e a 4 quadranti (colore = bianco luminoso)

LINE ( 230 , 0 ) - (230 , 320 ) ' comanda il tracciamento dell'asse delle ordinate ( asse Y)
                                 ' per coordinate a 4 quadranti (colore = bianco luminoso)

FOR x = - 10 TO 10 STEP .01 ' campo di variabilità ed incremento della x , punto c) , punto e)     &
```

PSET (230 + 23 * x , 160 - 3.2 * (4 * x + 8)) ,14 ' istruzione elaborata al punto i)

NEXT x ' comanda il programma al ritorno automatico all'istruzione FOR x = -10 ecc.

LOCATE 23 , 66 : PRINT "Y- Div. = 5" ' produce la scritta Y-Div. = 5 nell'angolo
' basso a destra dello schermo

LOCATE 22 , 66 : PRINT "X- Div. = 1" ' produce la scritta X-Div: = 1 nell'angolo
' basso a destra dello schermo

F5

si ottiene il grafico riportato in figura 15.

Dal grafico di figura 15 si osserva che il punto di intersezione tra la retta, di equazione $Y = 4x + 8$ e l'asse delle ascisse si ha per $x = -2$, valore questo che risolve l'equazione $4x + 8 = 0$ che ci eravamo proposta come esempio.
E' evidente che un procedimento così elaborato, come quello eseguito per ottenere la soluzione dell'equazione data, non è giustificabile se non per mostrare, in modo semplice, un tipo di metodologia che sarà invece indispensabile, in seguito, per la ricerca delle soluzioni di particolari equazioni.

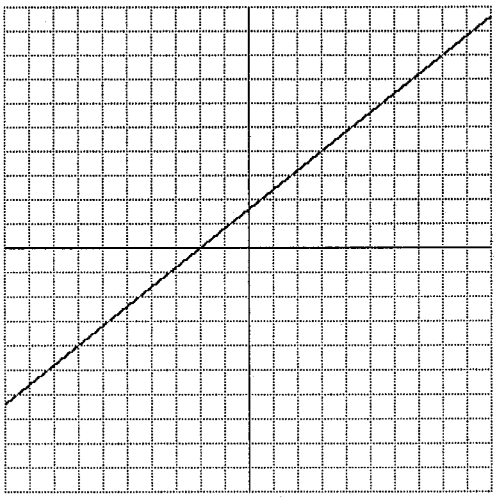

Figura 15
Grafico per soluzione equazione algebrica di primo grado
Campo di variabilità della x :
da -10 a +10
Scala asse x = 1 /div.
Scala asse y = 5 / div.

4.2 I sistemi di equazioni algebriche di primo grado a due incognite

In molte applicazioni matematiche e tecniche capita sovente di dover risolvere un sistema di due equazioni del tipo:

$$\begin{cases} a1\ x + b1\ y = c1 \\ a2\ x + b2\ y = c2 \end{cases}$$

Dal punto di vista operativo la soluzione del sistema non presenta difficoltà, se però si devono risolvere più sistemi diversi, con coefficienti numerici a più cifre l'operazione diventa pesante e richiede molta attenzione per non incorrere in errori.

Questo è pertanto il caso in cui l'impiego del P.C. in Qbasic sveltisce notevolmente il lavoro necessario per la soluzione dei sistemi di equazioni.
Il programma che andiamo a compilare si basa sulle due forme risolutive del sistema espresse in base ai coefficienti che vi compaiono:

$$x = \frac{c1\ b2 - b1\ c2}{a1\ b2 - b1\ a2}$$

$$y = \frac{a1\ c2 - c1\ a2}{a1\ b2 - b1\ a2}$$

formule che opportunamente tradotte in linguaggio Qbasic rendono la seguente stesura:

```
CLS ' pulisce lo schermo

INPUT " a1= " ; a1  ' richiesta di ingresso coefficiente a1

INPUT " b1= " ; b1  ' richiesta di ingresso coefficiente b1

INPUT " c1= " ; c1  ' richiesta di ingresso coefficiente c1

INPUT " a2= " ; a2  ' richiesta di ingresso coefficiente a2

INPUT " b2= " ; b2  ' richiesta di ingresso coefficiente b2

INPUT " c2= " ; c2  ' richiesta di ingresso coefficiente c2

x = ( c1 * b2 - b1 * c2 ) / ( a1 * b2 - b1 * a2 )  ' calcolo dell'incognita x

y = ( a1 * c2 - c1 * a2 ) / ( a1 * b2 - b1 * a2 )  ' calcolo dell'incognita y

PRINT " x= " ; x  ' visualizzazione soluzione in x

PRINT " y=" ; y  ' visualizzazione soluzione in y
```

Per renderci conto della comodità del programma lo proviamo per la soluzione del seguente sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} -3.4321\ x - 579.56\ y = 344.78 \\ 45.897\ x - 345.99\ y = -217 \end{cases}$$

sistema che, come si può vedere dai valori dei coefficienti, non è facilmente manipolabile .
Facciamo girare il programma:

```
          F5
a1= ?   -3. 4321
b1= ?  -579. 56
c1= ?  344. 78
a2 = ?   45. 897
b2 = ? - 345. 99
c2 = ? - 217
x =  - 8.81888
y =  - . 542675
          F5
```

Il sistema che abbiamo risolto, con l'ausilio del programma testé compilato, mostra l'utilità di questa rapida procedura che ci dà la possibilità di affrontare, in brevissimo tempo, la soluzione di sistemi algebrici che richiederebbero altrimenti tempi di elaborazione non indifferenti.
E' importante osservare che un sistema ammette soluzioni quando è **determinato**, se invece è indeterminato od impossibile non si hanno soluzioni e il programma si blocca; compare in tale caso un riquadro, al centro dello schermo, con la scritta **Overflow**. Dopo l'overflow, per riprendere il lavoro, è necessario pigiare il tasto **ESC** e riavviare il programma.

4.2.1 La soluzione grafica per i sistemi algebrici a due incognite

La soluzione dei sistemi algebrici per via grafica non ha interesse pratico, la procedura da seguire è però importante, sia come esercizio speculativo, sia come fondamentale preparazione per altre applicazioni nel campo delle equazioni trascendenti; vediamo quali sono i criteri che la informano:

Dal sistema

$$\begin{cases} a1\ x + b1\ y = c1 \\ a2\ x + b2\ y = c2 \end{cases}$$

esplicitando l'incognita y dalle due equazioni otteniamo una diversa struttura equivalente:

$$\begin{cases} y = -(a1 / b1)\,x + (c1 / b1) \\ y = -(a2 / b2)\,x + (c2 / b2) \end{cases}$$

dalla nuova struttura si vede che le due equazioni non sono altro che le funzioni della geometria analitica rappresentanti due rette; la soluzione del sistema infatti è data dai valori delle coordinate x ed y del punto di intersezione di queste rette, coordinate che si possono ricavare, con approssimazione, dal grafico delle due funzioni. Un esempio è necessario per entrare nel merito di questo argomento: proponiamoci, ad esempio, la soluzione grafica del sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 8x - 3y = 12 \end{cases}$$

esplicitando le y delle due equazioni otteniamo la struttura equivalente del sistema

$$\begin{cases} y = (-3/5)\,x + 7/5 \\ y = (8/3)\,x - 4 \end{cases}$$

con la quale abbiamo messo in evidenza le equazioni delle due rette che dobbiamo tracciare.
Dobbiamo ora compilare il programma grafico che ci dia modo di valutare i valori delle coordinate x ed y del punto di intersezione delle rette; tali valori sono le soluzioni del sistema dato.
Definiamo pertanto:

a) in base alla natura del problema, la ricerca del punto di intersezione tra due rette che può essere ovunque collocato, si deve adottare la presentazione cartesiana a 4 quadranti "sbloccando" la prima e la terza istruzione del programma di paragrafo 3.14
b) in base alla presentazione scelta si evidenziano il numero degli intervalli in cui sono divisi gli assi cartesiani: asse X = 10 intervalli asse Y = 10 intervalli
c) si fissano i valori del campo di variabilità della x da -10 a +10; con questi valori si ha un adattamento automatico al numero degli intervalli stabiliti per la calibrazione della scala

d) si fissa il valore massimo del campo di variabilità di y per avere un adattamento alla scala y =10
e) si fissa l'incremento della variabile indipendente in .01 (pari a 1000 punti di calcolo)
f) si riporta l'istruzione PSET relativa ai 4 quadranti **PSET (230 + k * x , 160 - k2 * y)**
g) si determina il coefficiente k in base al campo di variabilità fissato per la x in 10
k = 230 / 10 = 23
h) si determina il coefficiente k2 in base al semicampo fissato per y in 10
k2 = 160 / 10 = 16
i) si riporta l' equazione della prima retta distinguendo la variabile dipendente y con y1

$$y1 = (-3 / 5) x + 7/5$$

l) si riporta l' equazione della seconda retta distinguendo la variabile dipendente y con y2

$$y2 = (8 / 3) x - 4$$

m) sulla base dei punti f), g), h), i), si completano, in simbologia Qbasic, le istruzioni finali che permettono di tracciare la prima retta su scala calibrata:

```
y1 = ( -3 / 5 ) * x + ( 7 / 5 )

PSET ( 230 + x * 23, 160 - 16 * y1 )
```

n) sulla base dei punti f), g), h), l), si completano, in simbologia Qbasic, le istruzioni finali che consentono di tracciare la seconda retta su scala calibrata:

```
y2 = ( 8 / 3 ) * x - 4

PSET ( 230 + x * 23, 160 - 16 * y2 )
```

si compila infine il programma:

```
LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )  ' ASSE Y a 4 quadranti
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )  ' ASSE X a 4 quadranti
FOR x = - 10 TO 10 STEP .01  ' campo di variabilità imposto ed incremento della x
y1 = ( -3 / 5 ) * x + ( 7 / 5 )  ' calcolo funzione della prima retta
PSET ( 230 + x * 23 , 160 - 16 * y1 ) ' presentazione grafica prima retta
y2 = ( 8 / 3 ) * x - 4  ' calcolo funzione della seconda retta
PSET ( 230 + x * 23 , 160 - 16 * y2 ) ' presentazione grafica seconda retta
NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR x= -10 ecc.
LOCATE 23, 66: PRINT "y-Div.= 1"  ' intervalli scala asse Y ; 1
LOCATE 22, 66: PRINT "x-Div.= 1"  ' intervalli scala asse X ; 1

F5
```

si ha la presentazione delle due rette come mostrato in figura 16

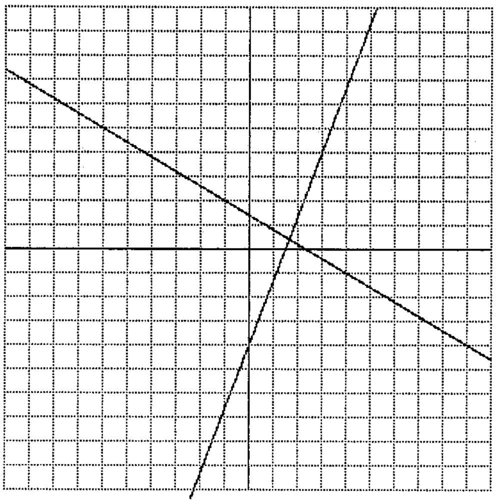

Figura 16
Grafico per la soluzione di sistema algebrico di primo grado a due incognite
Campo di variabilità della x :
da -10 a +10
Scala asse x = 1 /div.
Scala asse y = 1 / div.

Dall'esame del grafico si vede che le rette si intersecano in un punto le cui coordinate x ed y possono essere valutate, con approssimazione, in: x = 1.6 y = .4; questi valori sono, in prima battuta, la soluzione del sistema dato. E' possibile, una volta individuato il punto di intersezione delle due rette, aumentare la precisione del rilievo grafico mediante opportuni cambiamenti di scala; vedremo più avanti, in più importanti applicazioni, come procedere per ottenere risultati migliori. Nel grafico una retta esce naturalmente dal reticolo; impareremo a troncarne il tracciato per contenere le immagini nell'ambito dello spazio assegnato.

4.3 L'equazione algebrica di secondo grado

In questo paragrafo vogliamo mostrare come si implementa in Qbasic un programma per la soluzione delle equazioni algebriche di secondo grado; anche questo strumento, così come quello relativo alla soluzione dei sistemi a due incognite, potrà essere archiviato per eventuali impieghi di lavoro.
L'equazione algebrica di secondo grado si presenta nella forma canonica:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

in cui (a) e (b) rappresentano rispettivamente i coefficienti dell'incognita di secondo e di primo grado e (c) è il termine noto dell'equazione.
Le soluzioni, o radici, dell'equazione sono date dalle espressioni:

$$x1 = \frac{-b + (D)^{1/2}}{2a}$$

$$x2 = \frac{-b-(D)^{1/2}}{2a}$$

in cui $D = b^2 - 4ac$
rappresenta il "discriminante dell'equazione"

Per implementare le formule risolutive in Qbasic si deve ricordare:

- se il valore di D " discriminante dell'equazione" è maggiore od uguale a zero si hanno soluzioni reali

- se D è inferiore a zero si hanno soluzioni complesse coniugate.

Ciò impone al programma una valutazione del segno del discriminante in modo che la routine di calcolo possa stabilire quando le soluzioni dell'equazione sono reali o quando invece sono complesse.
Per questo tipo di elaborazione è utile trasformare le due espressioni risolutive come segue:

$$x1 = \frac{-b}{2a} + \frac{(D)^{1/2}}{2a}$$

$$x2 = \frac{-b}{2a} - \frac{(D)^{1/2}}{2a}$$

dalle quali indicando con E ed F le frazioni

$$E = \frac{-b}{2a} \qquad F = \frac{(D)^{1/2}}{2a}$$

si possono riscrivere le formule risolutive in modo da implementarle più facilmente nella routine di calcolo

$$x1 = E + F \qquad x2 = E - F$$

ciò fatto non resta che compilare il programma per la soluzione dell'equazione di secondo grado:

```
CLS ' pulisce lo schermo

INPUT " a = " ; a ' richiesta di ingresso per il coefficiente a

INPUT " b = " ; b ' richiesta di ingresso per il coefficiente b

INPUT " c = " ; c ' richiesta di ingresso per il termine noto c

D = b ^ 2 - 4 * a * c ' calcolo del valore del discriminante D

E = - ( b / ( 2 * a ) ) ' calcolo del valore di E

F = ( 1 / ( 2 * a ) ) * SQR ( ABS ( D ) ) ' calcolo del valore di F mediante il valore assoluto | D |; ciò &
```

```
                                   ' allo scopo di computare la radice quadrata anche se  D < 0
x1 =  E + F  ' calcolo della prima soluzione

x2 =  E - F  ' calcolo della seconda soluzione

IF  D >= 0  THEN  PRINT "x1=" ; x1 ; "                    " ; " x2= " ; x2
                    ' istruzione che comanda la 'stampa di x1 e x2  se sono valori reali ,cioè per  D>=0

IF  D < 0    THEN  PRINT "x1=" ; E ; " + j " ; ABS ( F ) ; "        " ; " x2 = " ; E ; "-j" ; ABS ( F )
                    ' istruzione che comanda la stampa di x1 e x2 se sono valori complessi
                    ' cioè per D < 0 ,  in tale caso stampa :
                    ' per x1 ;  + j davanti al valore assoluto di   F
                    ' per x2 ;  -  j davanti al valore assoluto di   F
```

Due esempi numerici aiuteranno il lettore all'uso della routine di calcolo:
sia da risolvere l'equazione algebrica di secondo grado

$$2x^2 - 3x + 7 = 0$$

impiegando il programma che abbiamo compilato:

```
               F5
a = ? 2
b = ? -3
c = ? 7
x1 =  . 75 + j 1.713914              x2 = . 75 - j 1.713914

               F5
```

il calcolo mostra che le radici dell'equazione sono complesse coniugate; ciò dipende dal segno negativo del discriminante D:
$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -47.$
Risolviamo ora l'equazione

$$-2x^2 - 3x + 7 = 0$$

```
               F5
a = ? - 2
b = ? - 3
c = ?  7
x1 =  - 2.765564           x2 =  1.265564

               F5
```

i risultati mostrano che l'equazione ha due soluzioni reali; infatti il valore del discriminante è maggiore di zero:
$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 7 = 65$
La soluzione delle due equazioni proposte ha dato un'idea dell'utilità del programma, utilità che risulta ancor più evidente quando le equazioni da risolvere hanno coefficienti e termine noto formati da molte cifre, cosa che accade quasi sempre nelle applicazioni pratiche e che richiede operazioni lunghe e non prive di rischi d'errore; vediamone un caso per chiudere questo paragrafo; sia da risolvere l'equazione

$$-3.78442x^2 - .432776x + 2.88654 = 0$$

F5

a = ? -3.78442
b = ? -. 432776
c = ? 2.88654
x1 = - . 93240 x2 = . 8180427

F5

4.3.1 La soluzione grafica dell'equazione algebrica di secondo grado

La soluzione grafica dell'equazione di secondo grado non ha applicazioni pratiche ma, come le precedenti, è interessante perché aiuta a comprendere meglio ciò che sarà trattato nel prosieguo del testo. Prima di iniziare la procedura per il computo grafico delle radici dell'equazione è necessario ragionare sulla sua forma canonica:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

il primo membro di questa espressione, come accennato nel paragrafo 2.28, rappresenta l'equazione di una parabola che il secondo membro vincola con y = 0; in altri termini si dice che l'equazione di secondo grado altro non è che la funzione parabola uguagliata a zero per la ricerca dei suoi punti di intersezione con l'asse delle ascisse.
Infatti data la parabola

$$y = a x^2 + b x + c$$

se questa interseca l'asse x in x1 ed x2, questi due valori coincidono con le radici dell'equazione sopra indicata.
A questo punto si devono ricordare alcune nozioni:

- Se la parabola interseca l'asse x, sia che rivolga la concavità verso l'alto, sia rivolga la concavità verso il basso, le due soluzioni reali dell'equazione di secondo grado, che si ottengono uguagliando a zero la funzione, sono le ascisse dei due punti .

- Se la parabola è soltanto tangente all'asse delle ascisse l'equazione che si ricava fornisce una sola radice (si dice in questo caso che le radici sono reali e coincidenti) che rappresenta l'ascissa dell'unico punto di contatto tra la parabola e l'asse x.

- Se la parabola non interseca l'asse x le soluzioni dell'equazione da essa ricavata non sono reali ma complesse coniugate e non forniscono alcuna informazione sulla geometria della curva.

Chiarito quanto sopra, determiniamo la soluzione grafica dell'equazione già sviluppata algebricamente nel paragrafo precedente:

$$2 x^2 - 3 x + 7 = 0$$

che trasformiamo nella funzione parabola corrispondente

$$y = 2 x^2 - 3 x + 7$$

a) in base alla natura della funzione si sceglie la presentazione cartesiana a 4 quadranti "sbloccando" la prima e la terza istruzione del programma di paragrafo 3.14
b) in base alla presentazione scelta si evidenziano il numero degli intervalli in cui sono divisi gli assi cartesiani: asse X = 10 intervalli asse Y = 10 intervalli
c) si fissano i valori del campo di variabilità della x in modo tale che la y corrispondente compia

certamente una escursione dai valori negativi a quelli positivi: ciò si ottiene, a vista, per x che varia da -10 a +10, con questi valori si ha un adattamento automatico al numero degli intervalli stabiliti per la calibrazione della scala

d) si riporta il valore massimo del campo di variabilità di y pari a quello della x = 10

e) si fissa l'incremento della variabile indipendente in .01

f) si riporta l'istruzione PSET relativa ai 4 quadranti **PSET (230 + k * x , 160 - k2 * y)**

g) si determina il coefficiente k in base al nuovo campo di variabilità fissato per la x in 10
k = 230 / 10 = 23

h) si determina il coefficiente k2 in base al nuovo semicampo fissato per y in 10
k2 = 160 / 10 = 16

i) sulla base dei punti f), g), h), si completa, in simbologia Qbasic, l'istruzione finale che ci consente di tracciare la nostra parabola su scala calibrata, si aggiunge il colore giallo:

```
PSET ( 230 + 23 * x , 160 - 16 * ( 2 * x ^ 2 - 3 * x +7 ) ), 14
```

si compila infine il programma:

```
LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )   ' ASSE Y  4 quadranti

LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )   ' ASSE  X   2 e 4 quadranti

FOR  x = - 10  TO  10  STEP .01  ' campo di variabilità ed incremento imposto per la x

PSET ( 230 +  23 * x , 160 -  16 * (  2 * x ^ 2 - 3 * x  + 7  ) ), 14  ' presentazione  della parabola

NEXT x   ' rimanda all'istruzione FOR x= -10 ecc.

LOCATE 23, 66: PRINT "y-Div.= 1"   ' intervalli scala asse Y  ;  1

LOCATE 22, 66: PRINT "x-Div.= 1"   ' intervalli scala asse X  ; 1
```

F5

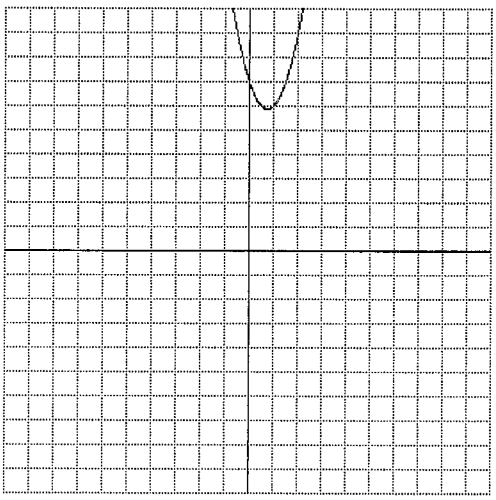

Figura 17
Grafico per la ricerca radici equazione di secondo grado (caso con radici complesse)
Campo di variabilità di x: da -10 a + 10
Scala asse x = 1 /div.
Scala asse y = 1/ div.

dal grafico risultante, riportato in figura 17, si osserva che la parabola non ha nessun punto di contatto con l'asse delle ascisse, ciò significa che l'equazione di secondo grado di cui cerchiamo le soluzioni non ha radici reali ma soltanto radici complesse; ciò peraltro era già stato calcolato algebricamente nel paragrafo 4.2. Nessun altro elemento dell'equazione data è ricavabile dal grafico.
Un secondo esempio ci mostra invece il caso in cui l'equazione di secondo grado ha radici reali; si prende in esame l'equazione

$-2x^2 - 3x + 7 = 0$ e si trasforma nella parabola corrispondente
$Y = -2x^2 - 3x + 7$

adottando l'identica procedura dell'esercizio precedente possiamo compilare direttamente il programma che sarà diverso dal primo soltanto per la nuova funzione parabola:

```
LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )  ' ASSE Y   4 quadranti

LINE ( 0, 160 )-(460, 160 )  ' ASSE X   2 e 4 quadranti

FOR  x = - 10  TO  10  STEP  .01 ' campo di variabilità  ed incremento imposto per la x

PSET ( 230 +  23 * x , 160 -  16  *  (  - 2 * x ^ 2 - 3 * x  + 7  ) ), 14  ' presentazione grafica della parabola

NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR x= -10 ecc.

LOCATE 23, 66: PRINT "y-Div.= 1"    ' intervalli scala asse Y  ;  1

LOCATE 22, 66: PRINT "x-Div.= 1"    ' intervalli scala asse X  ; 1
```

premendo F5 si ha il grafico risultante riportato in figura 18, si osserva che la parabola ha due punti di contatto con l'asse delle ascisse, ciò significa che l'equazione di secondo grado di cui cerchiamo le soluzioni ha due radici reali come era già stato calcolato algebricamente nel paragrafo 4.2. I valori approssimati rilevati a vista risultano $x1 = 1.2$ $x2 = -2.8$

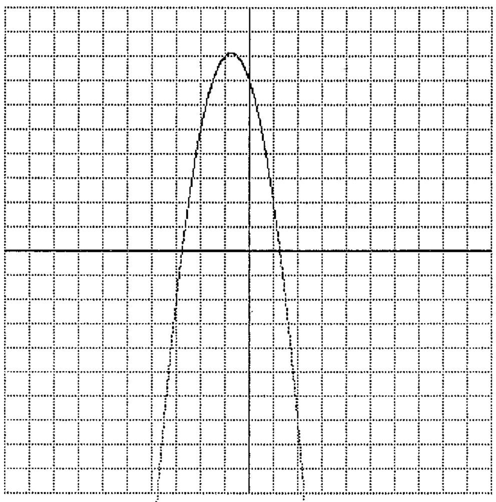

Figura 18
Grafico per ricerca radici
reali equazione secondo grado
Campo di variabilità di x:
da -10 a +10
Scala asse x = 1 /div.
Scala asse y = 1/ div.

4.4 Strumento grafico a scale variabili

E' illustrato in questo paragrafo uno strumento grafico indispensabile nella ricerca delle soluzioni delle equazioni algebriche di grado superiore al secondo e delle equazioni trascendenti. Lo strumento è derivato da quello impiegato fino ad ora e dà modo, a comando esterno, di variare rapidamente le scale del reticolo per la ricerca delle radici delle equazioni e la loro successiva determinazione numerica. Non conoscendo infatti la posizione grafica dei punti dell'asse x che risolvono l'equazione data è necessario, all'inizio della ricerca, allargare il campo di variabilità della x il più possibile per individuare di massima dove sono collocate le radici, una volta stabilita la zona interessata alle radici stesse si effettuano uno o più cambiamenti di scala in modo da poterne valutare i valori con la maggior precisione compatibile con la scala selezionata .
Il nuovo sistema grafico non è strutturato, come il precedente, per ottenere la riproducibilità delle funzioni in tutto il campo assegnato alla variabile indipendente, esso provoca il "troncamento" delle curve, al valore massimo del fondo scala delle ordinate, dove i tracciati non sono più utili per la ricerca delle radici dell'equazione da risolvere.
Questo strumento non fornisce alcuna indicazione in merito ad eventuali radici complesse.
Il programma deve eseguire i calcoli a doppia precisione per una corretta valutazione delle radici dell'equazione dopo la fase di ricerca.

Il programma che gestisce questa nuova grafica è qui mostrato compilato e commentato:

```
LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )  ' ASSE  Y 4  quadranti scelto per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )  ' ASSE  X 4  quadranti scelto per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LOCATE 10, 66: INPUT "x inizio" ;  i    ' richiesta ingresso estremo inferiore campo variabilità di x

LOCATE 11, 66: INPUT "x fine"   ;  f   ' richiesta ingresso estremo superiore campo variabilità di x

LOCATE 12, 66: INPUT "step"     ; p   ' richiesta ingresso valore dell'incremento di x (STEP)

LOCATE 13, 66: INPUT "x-Div."   ; s   ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse x

LOCATE 14, 66: INPUT "y-Div"    ; t  ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse y

LOCATE 15, 66: PRINT "-sn;+dx"    ' indicazione per l'istruzione successiva relativa allo spostamento
                                  ' a sinistra ( -sn) o a destra ( +dx) rispetto allo zero del tracciato
                                  ' della funzione

LOCATE 16, 66: INPUT "spost.x"  ; g  ' richiesta ingresso entità di spostamento del tracciato della
                                     ' funzione

FOR x = i  TO  f   STEP p  ' variazione della x nel campo stabilito a comando tra (inizio,i) e (fine,f)

y# =  f( x )  ' funzione ricavata dall'equazione da risolvere espressa a doppia precisione

r# = ( 16 / t )  * y#    ' calcolo variabile  r  a doppia precisione per ordinata istruzione PSET
                         ' comprensiva valore di scala stabilito a comando  per l'asse y ( lettera t)

IF r#  >  160 THEN r#  =  160  ' istruzione che evita l'overflow positivo durante la ricerca delle radici

IF r#  < - 160 THEN r#  =  -160 ' istruzione che evita l'overflow  negativo durante la ricerca delle radici

PSET ( 230 - ( 23 / s  ) * ( -g  ) + ( 23 / s  ) * x , 160 - r# ), 15  ' genera  il tracciato del grafico
              ' della funzione in base al valore di scala
              ' stabilito a comando  per l'asse x  (lettera s) , inoltre sposta il tracciato in base         &
```

' al valore assegnato a comando esterno da "spost.x" tramite la (lettera g)
NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR x = i .....

Una precisazione deve essere fatta in merito alla scelta dei valori del campo di variabilità della x e delle scale da assegnare, sia alla variabile indipendente, sia alla variabile dipendente; non è sempre possibile al primo tentativo presentare la funzione nel migliore dei modi per poter ricavare le informazioni volute, a volte è necessario ripetere più di una volta l'impostazione grafica variando i valori introdotti nel programma. Negli esercizi che seguono, questo tipo di "messa a punto" del grafico è stato fatto, quando si è reso necessario, ma non lo si è menzionato per evitare al lettore pagine di descrizione inutili relative a tentativi preliminari che si risolvono in pochi minuti di lavoro al P.C .
La ricerca dei valori ottimali per una soddisfacente presentazione grafica delle funzioni si realizza dopo un poco di esperienza .

4.5 Soluzione dell'equazione algebrica di terzo grado

L'equazione algebrica di terzo grado, per la soluzione della quale sono state studiate diverse e complicate formule, può essere risolta facilmente mediante lo strumento grafico illustrato nel paragrafo 4.4. Vediamo per esempio come risolvere l'equazione:

$$-x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

per prima cosa se ne scrive la funzione corrispondente

$$y = -x^3 + x^2 + x + 1$$

in modo da poterne tracciare il grafico affinché questo mostri i punti in cui la curva interseca l'asse delle x:

-Se l'equazione ammette radici reali queste saranno individuate da detti punti, se l'equazione non ammette alcuna soluzione reale la curva non intercetterà l'asse delle ascisse.
-Per la ricerca delle radici è conveniente adottare un campo di variabilità della x piuttosto ampio, nel quale poter osservare come la variabile dipendente y si sviluppa allontanandosi decisamente dall'asse x.
-Dalla funzione corrispondente l'equazione data si vede facilmente che se fissiamo il campo di variabilità della x tra -10 (x inizio) e +10 (x fine) i valori che la y assume agli estremi del campo sono molto grandi e indicano una netta tendenza della funzione a " fuggire " da eventuali punti di contatto con l'asse x; ciò assicura che tale campo è adatto alla ricerca delle radici.
-Se nell'ambito del campo di variabilità della x vogliamo calcolare un numero sovrabbondante di punti, rispetto ai 460 pixel disponibili, possiamo assumere l'incremento della x pari a (step =.01), ottenendo in tal modo 20/.01 = 2000 punti di calcolo.
-Dato il campo di variabilità assunto per la x e considerato che il reticolo è formato da 20 intervalli è immediato fissare come valore di ciascuna divisione delle ascisse (Div.x= 1).
Ritenendo che quando la y raggiunge il valore 100 la funzione sia già in "fuga" stabiliamo con esso il massimo della scala delle ordinate assegnandole, per conseguenza, una suddivisione pari a (Div.y= 10).
-Essendo in fase di ricerca delle radici è necessario che la funzione venga presentata senza alcuna traslazione orizzontale; si porrà pertanto (spost. x = 0).

Determinati tutti i valori necessari alla nostra ricerca riscriviamo il programma di paragrafo 4.4 inserendovi la funzione da tracciare:

LINE (230, 0)-(230, 320) ' ASSE Y 4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione &

```
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )  ' ASSE  X 4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LOCATE 10, 66: INPUT "x inizio"  ; i  ' richiesta ingresso estremo inferiore campo variabilità di x

LOCATE 11, 66: INPUT "x fine"    ; f  ' richiesta ingresso estremo superiore campo variabilità di x

LOCATE 12, 66: INPUT "step"      ; p  ' richiesta ingresso valore dell'incremento di x (STEP)

LOCATE 13, 66: INPUT "x-Div."    ; s  ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse x

LOCATE 14, 66: INPUT "y-Div."    ; t  ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse y

LOCATE 15, 66: PRINT "-sn;+dx"  ' indicazione per l'istruzione successiva relativa allo spostamento
                                ' a sinistra ( -sn) o a destra ( +dx) rispetto allo zero del tracciato
                                ' della funzione

LOCATE 16, 66: INPUT "spost.x"  ;  g  ' richiesta ingresso entità di spostamento del tracciato della
                                      ' funzione

FOR  x = i  TO  f   STEP  p   '  variazione della x nel campo stabilito a comando tra (inizio,i) e (fine,f)

y# = - x ^ 3 + x ^ 2 + x + 1  ' funzione ricavata dall'equazione da risolvere espressa a doppia
                              ' precisione

r# = ( 16 / t ) * y#  ' calcolo variabile  r  a doppia precisione per ordinata istruzione PSET
                      ' comprensiva valore di scala stabilito a comando  per l'asse y ( lettera t)

IF r#  > 160 THEN  r# = 160 ' istruzione che evita l'overflow  positivo durante la ricerca delle radici

IF r#  < - 160 THEN  r# = - 160 ' istruzione che evita l'overflow  negativo durante la ricerca delle radici

PSET ( 230 - ( 23 / s ) * ( -g ) + ( 23 / s ) * x , 160 - r# ), 15  ' genera  il tracciato del grafico
                                                                    ' della funzione in base al valore di scala
          ' stabilito a comando  per l'asse x  (lettera s) , inoltre sposta il tracciato in base
          ' al valore assegnato a comando esterno da "spost.x" tramite la (lettera g)
          ' rimanda all'istruzione FOR x = i .....

NEXT x   ' rimanda all'istruzione FOR x = i ....
            F5
```

dopo aver digitato F5 si ottiene, a sinistra dello schermo, il reticolo libero e sulla destra la prima richiesta dati che completata da seguito alla seconda e così via, dove digitiamo i valori che abbiamo fissato in precedenza come sotto riportato:

```
x inizio? -10
x fine?  +10
step.?  .01
x-Div:?  1
y-Div.? 10
-sn ;  +dx
spost. x ? 0
```

dopo l'introduzione dell'ultimo dato si ha la presentazione del grafico riportato in figura 19.

Dal tracciato si osserva:
-per valori di x < - 4.2 la y assume il valore costante di fondo scala positivo pari a +100, ciò dà luogo ad un segmento orizzontale posto tutto in alto a sinistra del reticolo (condizione imposta dal programma per evitare l'overflow). In questa zona in realtà la funzione è in "fuga".

-per valori di x > 5 la y assume il valore costante di fondo scala negativo pari a -100, ciò dà luogo ad un segmento orizzontale posto tutto in basso a destra del reticolo (condizione imposta dal programma per evitare l'overflow). In questa zona in realtà la funzione è in "fuga".
-per valori di x compresi tra - 4.2 e +5 la curva taglia l'asse delle ascisse in un solo punto, ad un valore di x valutabile con approssimazione a circa 1.8; questo rilievo ci dice che l'equazione ha una sola radice reale computabile al momento in x1 = 1.8.
Individuata l'unica radice reale dell'equazione si può procedere ad una sua valutazione più precisa mediante cambiamenti dei valori introdotti per la ricerca .

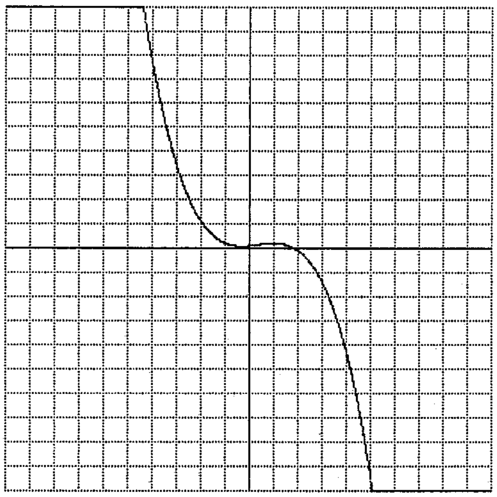

Figura 19
Grafico ricerca radici equazione algebrica di terzo grado
Campo di variabilità della x: da +10 a -10
Scala asse x = 1/div.
Scala asse y = 10/div.

Procediamo ad una migliore valutazione della radice in base a queste considerazioni:
-Dato che la radice è stata individuata nell'intorno di 1.8 fissiamo un nuovo campo di variabilità della x attorno a tale valore; tra 1.7 e 1.9 . (x inizio = 1.7) (x fine = 1.9)
-Fissiamo un incremento pari a .0001 al quale corrispondono (1.9 - 1.7) / .0001 = 2000 punti di calcolo (step = .0001)
-Determiniamo l'intervallo di divisione orizzontale del reticolo in (1.9 -1.7) / 10 = .02 (Div-x=.02) dal quale si ottiene una precisione di lettura migliore di 2/100.
-Per consentire un più facile apprezzamento dell'intersezione della curva con l'asse delle ascisse si fissa la scala delle ordinate a .1 per divisione (Div-Y=.1)
-Si impone alla curva uno spostamento verso sinistra pari a 1.7 (spost.x = -1.7) in modo che l'origine degli assi cartesiani non ha più il valore di riferimento 0 per le ascisse ma assume il valore +1.7
Il valore della radice che si leggerà sarà pertanto la somma tra il valore fisso 1.7 e il numero di divisioni che separano il punto di misura dall'origine degli assi.
Si ripete l'elaborazione a programma con i nuovi dati: F5

x inizio? + 1.7
x fine? +1. 9
step.? .0001
x-Div:? .02
y-Div.? .1
-sn ; +dx
spost. x ? -1.7

si ottiene il tracciato di figura 20 in cui è presentata soltanto una piccola parte della funzione nell'intorno del suo punto di intersezione con l'asse x.

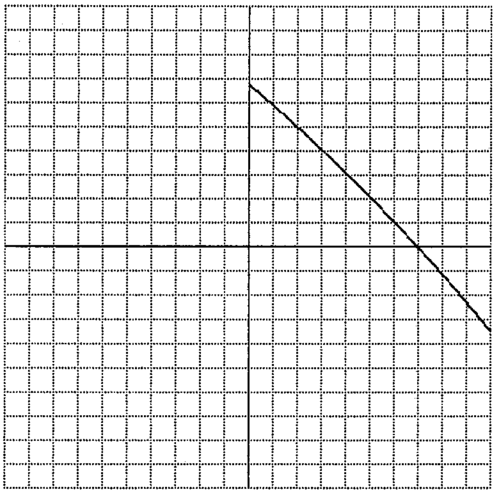

Figura 20
Grafico per valutazione radici
equazione algebrica di terzo grado
Campo di variabilità della x:
da +1.7 a +1.9
Scala asse x = .02 / div.
Scala asse y = .1 / div.

Dal tracciato si osserva:

-soltanto una piccola parte della funzione è tracciata tra il primo e il quarto quadrante
-il campo in cui la funzione è presentata è definito esclusivamente tra l'origine degli assi, che ora rappresenta il valore + 1.7, e l'estremo del campo di variabilità di x fissato in +1.9.
-il tratto di curva taglia l'asse delle ascisse a circa 7 divisioni rispetto all'origine degli assi; cioè ad una distanza dall'origine pari a $7 \cdot .02 = .14$.

Si conclude che il valore della radice è $x1 = + 1.7 + .14 = 1.84$
Se si desidera una precisione maggiore nella determinazione del valore della radice si ripete il procedimento impiegando un campo di variabilità della x più stretto del precedente con incrementi delle scale del reticolo e spostamento della curva, opportunamente adattati alle esigenze di misura.
Questi risultati, che si possono ottenere in pochi minuti di lavoro, mostrano l'indubbia utilità ed efficacia del metodo grafico che abbiamo impiegato.

Si consiglia il lettore di tentare la soluzione di altre equazioni algebriche, sia di terzo grado, sia di grado superiore al terzo, per prendere pratica con la procedura di calcolo.

4.6 Le equazioni trascendenti
Si dicono equazioni trascendenti tutte quelle che non sono algebriche; ad esempio l'equazione

$$\text{Log}\, x = 0$$

è una equazione trascendente, la soluzione della quale si ricava immediatamente mediante la corrispondente potenza in base dieci

$$x = 10^0 = 1$$

Le equazioni trascendenti si possono dividere in "due tipi":

-equazioni che con opportune manipolazioni matematiche permettono di ottenere le soluzioni; tali tipi sono prevalentemente riportati nei libri di testo come utili esercitazioni sull'argomento ma purtroppo in pratica si riscontrano assai di rado

-equazioni trascendenti scaturite da un problema reale non risolvibili, purtroppo, mediante eleganti giochi formali.

Se ci proponiamo ad esempio la soluzione della semplice equazione trascendente

$$e^x - 10 (x)^{1/2} = 0$$

non abbiamo altra strada che tentarne la soluzione grafica nel seguente modo:

-si compone la funzione trascendente, di cui si traccerà il grafico, partendo dall'equazione data

$$y = e^x - 10 (x)^{1/2}$$

-si scrive la procedura di impostazione
-Per la ricerca delle radici è necessario adottare un campo di variabilità della x contenuto nel semicampo dei valori positivi dato che la funzione ha la variabile indipendente sotto radice quadrata.
-Dalla funzione corrispondente l'equazione data si vede facilmente che se fissiamo il campo di variabilità della x tra 0 (x inizio) e +10 (x fine) il valore che la y assume per x = 10 è molto grande e indica una netta tendenza della funzione a " fuggire " da eventuali punti di contatto con l'asse x; ciò assicura che tale campo è adatto alla ricerca delle radici.
-Se nell'ambito del campo di variabilità della x vogliamo calcolare un numero sovrabbondante di punti, rispetto ai 230 pixel disponibili, possiamo assumere l'incremento della x pari a (step =.01), ottenendo in tal modo 10 / .01 = 1000 punti di calcolo.
-Dato il semicampo di variabilità assunto per la x e considerato che il reticolo è formato da 10 intervalli è immediato fissare come valore di ciascuna divisione delle ascisse (Div.x= 1).
Ritenendo che quando la y raggiunge il valore 100 la funzione sia già in "fuga" stabiliamo con esso il massimo della scala delle ordinate assegnandole, per conseguenza, una suddivisione pari a (Div.y=10).
-Essendo in fase di ricerca delle radici è necessario che la funzione venga presentata senza alcuna traslazione orizzontale; si porrà pertanto (spost. x = 0).

Determinati tutti i valori necessari alla nostra ricerca riscriviamo il programma di paragrafo 4.4 inserendovi la funzione da tracciare:

```
LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )  ' ASSE  Y  4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )  ' ASSE  X  4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LOCATE 10, 66: INPUT "x inizio"  ;  i   ' richiesta ingresso estremo inferiore campo variabilità di x

LOCATE 11, 66: INPUT "x fine"    ;  f   ' richiesta ingresso estremo superiore campo variabilità di x

LOCATE 12, 66: INPUT "step"      ;  p   ' richiesta ingresso valore dell'incremento di x (STEP)          &
```

```
LOCATE 13, 66: INPUT "x-Div."   ; s  ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse x

LOCATE 14, 66: INPUT "y-Div."   ; t  ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse y

LOCATE 15, 66: PRINT "-sn;+dx"   ' indicazione per l'istruzione successiva relativa allo spostamento
                                 ' a sinistra ( -sn) o a destra ( +dx) rispetto allo zero del tracciato
                                 ' della funzione

LOCATE 16, 66: INPUT "spost.x"  ; g  ' richiesta ingresso entità di spostamento del tracciato della
                                     ' funzione

FOR  x = i  TO  f  STEP  p  ' variazione della x nel campo stabilito a comando tra (inizio,i) e (fine,f)

y# = EXP ( x ) - 10 * SQR ( x )  ' funzione ricavata dall'equazione da risolvere espressa a doppia
                                 ' precisione

r# = ( 16 / t ) * y#  ' calcolo variabile  r  a doppia precisione per ordinata istruzione PSET
                      ' comprensiva valore di scala stabilito a comando  per l'asse y ( lettera t)

IF r# > 160 THEN r# = 160  ' istruzione che evita l'overflow  positivo durante la ricerca delle radici

IF r# < -160 THEN r# = -160 ' istruzione che evita l'overflow  negativo durante la ricerca delle radici

PSET ( 230 - ( 23 / s ) * ( -g ) + ( 23 / s ) * x , 160 - r# ), 15  ' genera  il tracciato del grafico
                     ' della funzione in base al valore di scala
                     ' stabilito a comando  per l'asse x  (lettera s) , inoltre sposta il tracciato in base
                     ' al valore assegnato a comando esterno da "spost.x" tramite la (lettera g)

NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR x = i .....


          F5
```

dopo aver digitato F5 si ottiene, a sinistra dello schermo, il reticolo libero e sulla destra la prima richiesta dati che completata dà seguito alla seconda e così via, dove digitiamo i valori che abbiamo fissato in precedenza come sotto riportato:

```
x inizio? 0
x fine? +10
step.? .01
x-Div:? 1
y-Div.? 10
-sn ; +dx
spost. x ? 0
```

dopo l'introduzione dell'ultimo dato si ha la presentazione del grafico riportato in figura 21 .
Dal tracciato si osserva:
-per valori di x > 4.7 la y assume il valore costante di fondo scala positivo pari a +100, ciò dà luogo ad un segmento orizzontale posto tutto in alto a destra del reticolo (condizione imposta dal programma per evitare l'overflow). In questa zona in realtà la funzione è in "fuga".
-per valori di x compresi tra 0 e 4.7 la curva taglia l'asse delle ascisse, apparentemente, in un solo punto, ad un valore di x valutabile con approssimazione a circa 2.8; questo rilievo ci dice che l'equazione ha una radice reale $x1 = 2.8$.
-la curva mostra inoltre valori negativi della y nell'intervallo della x compreso tra 0 e 2.8, cosa apparentemente in contrasto con il fatto che la funzione vale $y = 1$ per $x = 0$, ciò denuncia un passaggio del tracciato dai valori positivi ai valori negativi nelle immediate vicinanze dell'origine degli assi; a questo passaggio corrisponde un punto la cui ascissa, x2, è la seconda radice

dell'equazione data. Questa radice, non esplicitamente evidenziata, deve essere cercata con gli opportuni cambiamenti di scala.

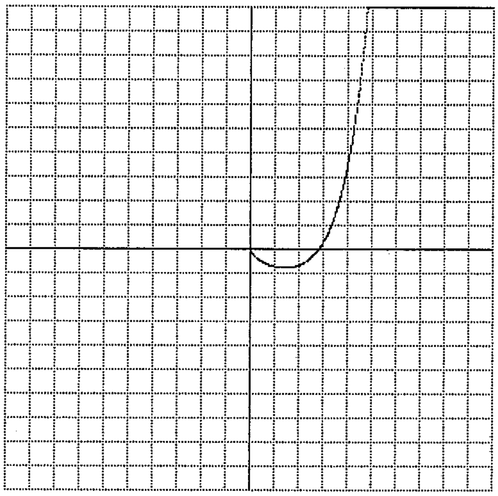

Figura 21
Grafico per ricerca radici equazione trascendente
Campo di variabilità della x: da 0 a + 10
Scala asse x = 1 / div.
Scala asse y = 10 / div.

Procediamo ad una migliore valutazione della radice x1 in base alle seguenti considerazioni:

-Dato che la radice è stata individuata nell'intorno di 2.8 fissiamo un nuovo campo di variabilità della x attorno a tale valore; tra 2 e 3 . (x inizio = 2) (x fine = 3)
-Fissiamo un incremento pari a .001 al quale corrispondono (3 - 2) / .001 = 1000 punti di calcolo (step = .001)
-Determiniamo l'intervallo di divisione orizzontale del reticolo in (3 - 2) / 10 = .1 (Div-x=.1) dal quale si ottiene una precisione di lettura migliore di 1/10.
-Per un più facile apprezzamento dell'intersezione della curva con l'asse delle ascisse si fissa la scala delle ordinate a .1 per divisione (Div-Y=.1)
-Si impone alla curva uno spostamento verso sinistra pari a 2 (spost.x = -2) in modo che l'origine degli assi cartesiani non ha più il valore di riferimento 0 per le ascisse ma assume il valore + 2. Il valore della radice che si leggerà sarà pertanto la somma tra il valore fisso 2 e il numero di divisioni che separano il punto di misura dall'origine degli assi.

Si ripete l'elaborazione a programma con i nuovi dati:

F5

x inizio? + 2
x fine? + 3
step.? .001
x-Div:? .1
y-Div.? .1
-sn ; +dx
spost. x ? - 2

si ottiene il tracciato di figura 22 in cui è presentata soltanto una parte della funzione nell'intorno del suo punto di intersezione con l'asse x.

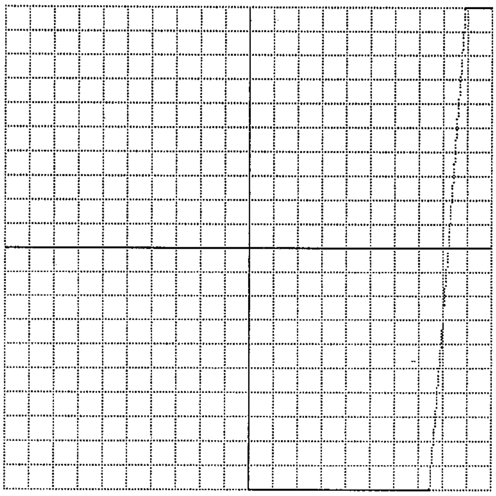

Figura 22
Grafico per valutazione prima radice equazione trascendente
Campo di variabilità della x: da 2 a 3
Scala asse x = .1 / div.
Scala asse y = .1 / div.

Dal tracciato si osserva:

-soltanto una parte della funzione è tracciata tra il primo e il quarto quadrante
-il campo in cui la funzione è presentata è definito esclusivamente tra l'origine degli assi, che ora rappresenta il valore + 2, e l'estremo del campo di variabilità di x fissato in +3
-il tratto di curva taglia l'asse delle ascisse a circa 8.2 divisioni rispetto all'origine degli assi; cioè ad una distanza dall'origine pari a $8.2 \cdot .1 = .82$.
Si conclude che il valore della radice è $x1 = + 2 + .82 = 2.82$

Se si desidera una precisione maggiore nella determinazione del valore della radice x1 si ripete il procedimento impiegando un campo di variabilità della x più stretto del precedente con incrementi delle scale del reticolo e spostamento della curva, opportunamente adattati alle esigenze di misura.
Si esegue ora la ricerca e la valutazione della radice x2 che, come abbiamo visto, deve trovarsi vicino all'origine degli assi:

-Dato che la radice è stata individuata indirettamente vicino allo 0 fissiamo un nuovo campo di variabilità della x tra 0 e .1 (x inizio = 0) (x fine = .1)
-Fissiamo un incremento pari a .0001 al quale corrispondono (.1 - 0) / .0001 = 1000 punti di calcolo (step = .0001)
-Determiniamo l'intervallo di divisione orizzontale del reticolo in (.1 - 0) / 10 = .01 (Div-x=.01) dal quale si ottiene una precisione di lettura migliore di 1/100.
-Per ottenere un più facile apprezzamento dell'intersezione della curva con l'asse delle ascisse si fissa la scala delle ordinate a .1 per divisione (Div-Y=.1)
-Dato che non è necessario spostare la curva sarà (spost.x = 0)

Si ripete l'elaborazione a programma con i nuovi dati:

F5

x inizio? 0
x fine? +.1
step.? .0001
x-Div:? .01
y-Div.? .1
-sn ; +dx
spost. x ? 0

si ottiene il tracciato di figura 23 in cui è presentata soltanto una parte della funzione nell'intorno del suo punto di intersezione con l'asse x.

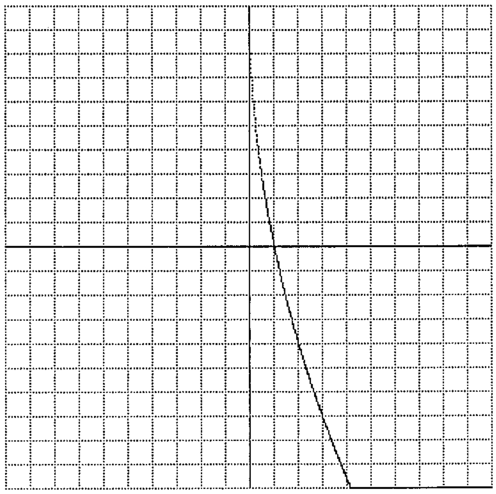

Figura 23
Grafico per valutazione seconda radice equazione trascendente
Campo di variabilità della x : da 0 a .1
Scala asse x = .01 / div.
Scala asse y = .1 / div.

Dalla figura 23 si osserva:

-soltanto una parte della funzione è tracciata tra il primo e il quarto quadrante
-in questa curva si evidenzia chiaramente l'intersezione della stessa con l'asse delle ascisse, cosa che avevamo soltanto dedotto, in precedenza, sulla base di certe osservazioni.
-il campo in cui la funzione è presentata è definito esclusivamente tra l'origine degli assi e l'estremo del campo di variabilità di x fissato in +.1
-il tratto di curva taglia l'asse delle ascisse ad una divisione rispetto all'origine degli assi, cioè ad un valore pari a .01; si conclude che il valore della radice è x2 = .01.

Se si desidera una precisione maggiore nella determinazione del valore della radice x2 si ripete il procedimento impiegando un campo di variabilità della x più stretto del precedente con incrementi, scale del reticolo, spostamento della curva, opportunamente adattati alle esigenze di misura.
Riassumendo i risultati del lavoro svolto possiamo concludere che l'equazione trascendente

$$e^{x} - 10 (x)^{1/2} = 0$$

ha due radici reali così definite:
x1 = 2.82; x2 = .01 .

4.7 I sistemi di equazioni trascendenti

Il sistema grafico impiegato per la soluzione delle equazioni trascendenti è utilizzabile anche per trovare le soluzioni di sistemi di tali equazioni. Vediamo in quale modo si deve procedere per questo tipo di applicazione mediante il seguente esempio:
sia da risolvere il sistema trascendente

$$\begin{cases} y - \text{Sen}\,x - 2 = 0 \\ e^{x} - .2\,y = 0 \end{cases}$$

per prima cosa si esplicitano le y

$$\begin{cases} y = \text{Sen}\,x + 2 \\ y = 5\,e^{x} \end{cases}$$

dopo di che si procede ad eguagliare i secondi membri del sistema come se si dovesse risolverlo in modo convenzionale

$$\text{Sen}\,x + 2 = 5\,e^{x}$$

per scrivere

$$\text{Sen}\,x + 2 - 5\,e^{x} = 0$$

a questo punto, dal sistema dato, siamo passati ad una equazione che possiamo risolvere con lo stesso metodo applicato nel paragrafo 4.6 mediante la stesura della funzione corrispondente:

$$y = \text{Sen}\,x + 2 - 5\,e^{x}$$

-Per la ricerca delle radici è necessario adottare un campo di variabilità piuttosto ampio onde trovare con più probabilità le intersezioni della funzione con l'asse delle x.
-Dalla funzione corrispondente l'equazione data si vede facilmente che se fissiamo il campo di variabilità della x tra -10 (x inizio) e +10 (x fine) i valori che la y assume all'estremo inferiore sono governati da Sen x + 2 che è sempre positivo e non interseca l'asse x, mentre per l'estremo superiore sono governati da -5 exp x che porta la funzione in fuga verso i valori negativi; è quindi certo che nel campo di variabilità scelto si troveranno le radici cercate.
-Se nell'ambito del campo di variabilità della x vogliamo calcolare un numero sovrabbondante di punti, rispetto ai 460 pixel disponibili, possiamo assumere l'incremento della x pari a (step =.01), ottenendo in tal modo 20 / .01 = 2000 punti di calcolo.
-Dato il campo di variabilità assunto per la x e considerato che il reticolo è formato da 20 intervalli è immediato fissare come valore di ciascuna divisione delle ascisse (Div.x= 1).
-Ritenendo che quando la y raggiunge il valore -10 la funzione sia già in "fuga" stabiliamo la scala delle ordinate assegnandole una suddivisione pari a (Div.y=1).
-Essendo in fase di ricerca delle radici è necessario che la funzione venga presentata senza alcuna traslazione orizzontale; si porrà pertanto (spost. x = 0).
Determinati tutti i valori necessari alla nostra ricerca riscriviamo il programma di paragrafo 4.4 inserendovi la funzione da tracciare:

```
LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )  ' ASSE  Y 4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )  ' ASSE  X 4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione        &
```

```
LOCATE 10, 66: INPUT "x inizio" ; i  ' richiesta ingresso estremo inferiore campo variabilità di x

LOCATE 11, 66: INPUT "x fine"   ; f  ' richiesta ingresso estremo superiore campo variabilità di x

LOCATE 12, 66: INPUT "step"     ; p  ' richiesta ingresso valore dell'incremento di x (STEP)

LOCATE 13, 66: INPUT "x-Div."   ; s  ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse x

LOCATE 14, 66: INPUT "y-Div."   ; t  ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse y

LOCATE 15, 66: PRINT "-sn;+dx"       ' indicazione per l'istruzione successiva relativa allo spostamento
                                     ' a sinistra ( -sn) o a destra ( +dx) rispetto allo zero del tracciato
                                     ' della funzione
LOCATE 16, 66: INPUT "spost.x" ; g   ' richiesta ingresso entità di spostamento del tracciato della
                                     ' funzione

FOR  x = i  TO  f   STEP  p  '  variazione della x nel campo stabilito a comando tra (inizio,i) e (fine,f)

y# = SIN ( x ) + 2 - 5 * EXP ( x ) ' funzione ricavata dal sistema da risolvere espressa a doppia  precisione

r# = ( 16 / t ) * y#  ' calcolo variabile  r  a doppia precisione per ordinata istruzione PSET
                      ' comprensiva valore di scala stabilito a comando  per l'asse y ( lettera t)

IF r# > 160  THEN  r# = 160  ' istruzione che evita l'overflow  positivo durante la ricerca delle radici

IF r# < -160  THEN r# = - 160 ' istruzione che evita l'overflow  negativo durante la ricerca delle radici

PSET ( 230 - ( 23 / s ) * ( -g ) + ( 23 / s ) * x , 160 - r# ), 15  ' genera  il tracciato del grafico
                                   ' della funzione in base al valore di scala
                                   ' stabilito a comando  per l'asse x  (lettera s) , inoltre sposta il tracciato in base
                                   ' al valore assegnato a comando esterno da "spost.x" tramite la (lettera g)

NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR x = i .....

           F5
```

dopo aver digitato F5 si ottiene, a sinistra dello schermo, il reticolo libero e sulla destra la prima richiesta dati che completata dà seguito alla seconda e così via, dove digitiamo i valori che abbiamo fissato in precedenza come sotto riportato:

```
x inizio? -10
x fine? +10
step.? .01
x-Div:? 1
y-Div.? 1
-sn ; +dx
spost. x ? 0
```

dopo l'introduzione dell'ultimo dato si ha la presentazione del grafico riportato in figura 24 .

Dal tracciato si osserva:
-per valori di x < -1.6 la y ondula secondo Sen x nel campo delle y positive
-per valori di x compresi tra -1.8 e +1 la curva taglia l'asse delle ascisse in un solo punto, ad un valore di x valutabile con approssimazione a circa -1.6; questo rilievo ci dice che l'equazione ha una radice reale $x1 = -1.6$
-la curva mostra inoltre la fuga della funzione, nel campo negativo di y, nell'intervallo della x compreso tra 1 e 10.

Procediamo ad una migliore valutazione della radice x1 in base alle seguenti considerazioni:

-Dato che la radice è stata individuata nell'intorno di -1.6 fissiamo un nuovo campo di variabilità della x attorno a tale valore; tra -1.7 e -1.5 . (x inizio = -1.7) (x fine = -1.5)
-Fissiamo un incremento pari a .0001 al quale corrispondono (1.7-1.5) / .0001 = 2000 punti di calcolo (step = .0001)
-Determiniamo l'intervallo di divisione orizzontale del reticolo in (1.7-1.5) / 10 = .02 (Div-x=.02) dal quale si ottiene una precisione di lettura migliore di 2/100.
-Per ottenere un più facile apprezzamento dell'intersezione della curva con l'asse delle ascisse si fissa la scala delle ordinate a .01 per divisione (Div-Y=.01)
-Si impone alla curva uno spostamento verso destra pari a 1.7 (spost.x = +1.7) in modo che l'origine degli assi cartesiani non ha più il valore di riferimento 0 per le ascisse ma assume il valore -1.7
I valore della radice che si leggerà sarà pertanto la somma algebrica tra il valore fisso -1.7 e il numero di divisioni che separano il punto di misura dall'origine degli assi.

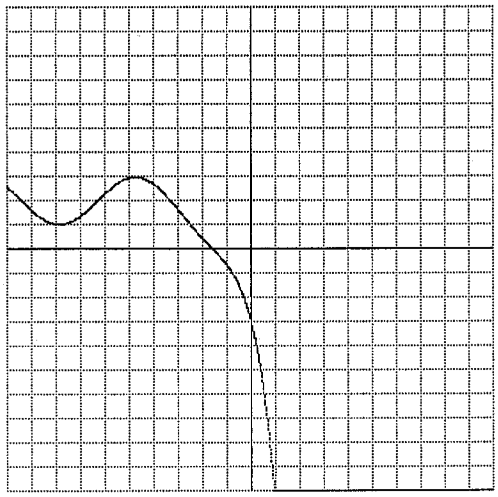

Figura 24
Grafico per ricerca soluzione sistema trascendente
Campo di variabilità della x : da -10 a + 10
Scala asse x = 1 / div.
Scala asse y = 1 / div.

Si ripete l'elaborazione a programma con i nuovi dati:

F5

```
x inizio? -1.7
x fine? -1.5
step.? .0001
x-Div:? .02
y-Div.? .01
-sn ; +dx
spost. x ? +1.7
```

si ottiene il tracciato di figura 25 in cui è presentata soltanto una parte della funzione nell'intorno del suo punto di intersezione con l'asse x.

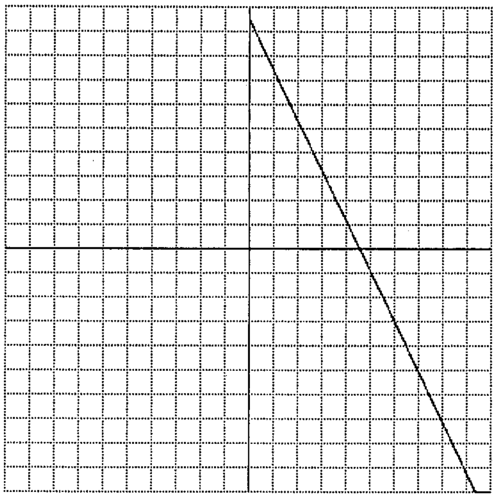

Figura 25
Grafico per soluzione ad alta precisione sistema trascendente
Campo di variabilità della x: da -1.7 a - 1.5
Scala asse x = .02/div.
Scala asse y =.01/div.

Dal tracciato si osserva:

-soltanto una parte della funzione è tracciata tra il primo e il quarto quadrante
-il campo in cui la funzione è presentata è definito esclusivamente tra l'origine degli assi, che ora rappresenta il valore - 1.7, e l'estremo del campo di variabilità di x fissato in -1.5
-il tratto di curva taglia l'asse delle ascisse a circa 4.5 divisioni rispetto all'origine degli assi; cioè ad una distanza dall'origine pari a $4.5 \cdot .02 = .09$
si conclude che il valore della radice è $x1 = -1.7 + .09 = -1.61$
Per completare la soluzione del sistema dato dobbiamo infine calcolare il valore di y1 corrispondente ad x1 sulla base di una delle due equazioni che lo compongono:

$$y = \text{Sen } x + 2 = \text{Sen } x1 + 2 = \text{Sen } (-1.61) + 2 = 1.0007$$

la soluzione completa del sistema è pertanto:

$$x1 = -1.61$$
$$y1 = 1.0007$$

4.8 Osservazioni sull'impiego del mezzo grafico

Concludiamo questo capitolo con alcune osservazioni sull'impiego del mezzo grafico.
Gli schemi di lavoro che ci hanno dato la possibilità di risolvere alcune equazioni sono stati adattati dall'autore, dopo alcune prove, alle diverse funzioni da trattare; gli schemi non sono rigidi, con un poco di esperienza si possono compilare schemi diversi ed, in brevissimo tempo, eseguire con essi numerosi tentativi con il P.C. per individuare al meglio i campi di variabilità della x che consentono di evidenziare le intersezioni del grafico della funzione con l'asse delle ascisse. Le potenzialità del sistema grafico potranno essere ulteriormente sviluppate dal lettore aggiungendo e, o, modificando il programma originale nel modo ritenuto più adatto alle proprie esigenze.