CAPITOLO 5
LA RICERCA DEI PUNTI NOTEVOLI DELLE FUNZIONI

Il capitolo 5 è dedicato all'impiego del Qbasic per la ricerca dei punti notevoli delle funzioni; luoghi di massimo e minimo relativi che caratterizzano le funzioni stesse.

5.1 Il problema della ricerca dei massimi e minimi di una funzione

E' noto come si possano determinare i punti di massimo e minimo relativi di una funzione quando questa sia facilmente derivabile; si ripropone il procedimento analitico a scopo di rinfrescare quanto appreso durante gli studi scolastici:

data la funzione $y = x^2 + x + 1$

se ne vogliono determinare eventuali punti di massimo o di minimo; a tale scopo se ne calcolano la derivata prima e la derivata seconda

$$y' = 2x + 1$$

$$y'' = 2$$

si eguaglia a zero la derivata prima risolvendo l'equazione che si ottiene

$$y' = 2x + 1 = 0$$

la soluzione di $2x + 1 = 0$ si ha per $x1 = -.5$; questa radice denuncia la presenza di un punto notevole la cui natura è ancora da stabilire.
Per conoscere se il punto è un massimo od un minimo della funzione si deve valutare che segno assume la derivata seconda in corrispondenza di $x1 = -.5$; questa sostituzione non è possibile dato che la y'' è, in questo caso, una costante indipendente da x. Si considera allora il segno di y'' così come è scaturito dal calcolo ($y'' = 2$); essendo $y'' > 0$, si può affermare che la funzione data ha un minimo per $x1 = -.5$.
L'esempio che abbiamo fatto ha mostrato l'estrema semplicità di tale operazione che richiede peraltro modestissime conoscenze di analisi matematica.
Le difficoltà che si incontrano nella pratica corrente però non permettono, il più delle volte, la soluzione del problema in termini così piani, sia a causa delle difficoltà di calcolo delle derivate se le funzioni sono molto complicate, sia per la difficoltà di soluzione delle equazioni discendenti dalle derivate, qualora le stesse siano state calcolate.
E' possibile risolvere molti problemi per la ricerca dei punti notevoli di una funzione, senza fare ricorso a mezzi di analisi matematica, ricorrendo, tramite il Qbasic, all'aiuto dei sistemi grafici con il supporto della programmazione numerica introdotta nel capitolo 2.
Le esercitazioni che seguono mostrano questa metodologia "mista" che dà interessanti risultati sul piano pratico.

5.2 Esercitazione grafico-numerica n° 1

Sia data la funzione

$$y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

se ne vogliano ricercare i punti notevoli.
Se dovessimo risolvere il problema per via puramente analitica il calcolo delle derivate sarebbe semplice, difficile sarebbe invece la ricerca algebrica delle radici della equazione discendente dalla derivata prima che, come si intuisce, è una equazione completa di terzo grado.
E' chiaro che la strada da percorrere è quella indicata nel paragrafo 5.1 secondo la quale si devono impiegare metodi grafici abbinati a computazioni numeriche; seguiamo pertanto uno schema preliminare simile a quello adottato per l'impiego dello strumento grafico di paragrafo 4.4:

-Per la ricerca dei punti notevoli è necessario adottare un campo di variabilità della x piuttosto ampio onde poterli individuare.
-Si fissa il campo di variabilità della x tra -10 (x inizio) e +10 (x fine) dato che per questi due valori estremi la funzione è già in "fuga" .
-Se nell'ambito del campo di variabilità della x vogliamo calcolare un numero sovrabbondante di punti, rispetto ai 460 pixel disponibili, possiamo assumere l'incremento della x pari a (step =.01), ottenendo in tal modo 20 / .01 = 2000 punti di calcolo.
-Dato il campo di variabilità assunto per la x e considerato che il reticolo è formato da 20 intervalli, è immediato fissare come valore di ciascuna divisione delle ascisse (Div.x= 1).
-Ritenendo che quando la y raggiunge il valore +10 o -10 la funzione sia già in "fuga", stabiliamo la scala delle ordinate assegnandole una suddivisione pari a (Div.y=1).
-Essendo in fase di ricerca dei punti notevoli è necessario che la funzione venga presentata senza alcuna traslazione orizzontale; si porrà pertanto (spost. x = 0).

Determinati tutti i valori necessari alla nostra ricerca riscriviamo il programma di paragrafo 4.4 inserendovi la funzione da studiare:

```
LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )  ' ASSE  Y 4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )  ' ASSE  X 4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LOCATE 10, 66: INPUT "x inizio"  ;  i  ' richiesta ingresso estremo inferiore campo variabilità di x

LOCATE 11, 66: INPUT "x fine"    ;  f  ' richiesta ingresso estremo superiore campo variabilità di x

LOCATE 12, 66: INPUT "step"      ;  p  ' richiesta ingresso valore dell'incremento di x (STEP)

LOCATE 13, 66: INPUT "x-Div."    ;  s  ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse x

LOCATE 14, 66: INPUT "y-Div."    ;  t  ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse y

LOCATE 15, 66: PRINT "-sn;+dx"     ' indicazione per l'istruzione successiva relativa allo spostamento
                                   ' a sinistra ( -sn) o a destra ( +dx) rispetto allo zero del tracciato
                                   ' della funzione

LOCATE 16, 66: INPUT "spost.x"  ;  g  ' richiesta ingresso entità di spostamento del tracciato della funzione

FOR  x = i  TO  f   STEP p   ' variazione della x nel campo stabilito a comando tra (inizio,i) e (fine,f)

y# = x ^ 4 + x ^ 3 + x ^ 2 + x + 1   ' funzione da studiare espressa a doppia precisione

r# = ( 16 / t ) * y#    ' calcolo variabile r a doppia precisione per ordinata istruzione PSET
                        ' comprensiva valore di scala stabilito a comando per l'asse y ( lettera t)

IF r# > 160 THEN r# = 160   ' istruzione che evita l'overflow positivo

IF r# < -160 THEN r# = -160  ' istruzione che evita l'overflow negativo          &
```

```
PSET ( 230 - ( 23 / s ) * ( -g ) + ( 23 / s ) * x , 160 - r# ), 15  ' genera il tracciato del grafico della funzione
                                                                     ' in base al valore di scala stabilito
                                                                     ' a comando per l'asse x (lettera s) , inoltre sposta il tracciato in base
                                                                     ' al valore assegnato a comando esterno da "spost.x" tramite la (lettera g)

NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR x = i .....
```

F5

```
x inizio? -10
x fine? +10
step.? .01
x-Div:? 1
y-Div.? 1
-sn ; +dx
spost. x ? 0
```

si ottiene il tracciato di figura 26 in cui è visibile un punto notevole (minimo della funzione)

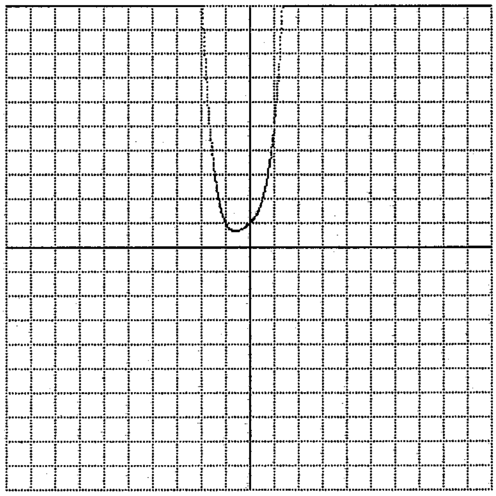

Figura 26
Grafico per ricerca punti notevoli funzione di quarto grado
Campo do variabilità della x : da -10 a + 10
Scala asse x = 1 / div.
Scala asse y = 1 / div.

Dal tracciato si osserva:

-la funzione è in fuga nel campo dei valori positivi di y per x < -2 e x > +1.3
-nell'intervallo delle ascisse compreso tra -2 e +1.3 è presente una sella della funzione che ha il suo punto più basso per un valore di x valutabile con approssimazione in circa - .7; questo è l'unico punto notevole della funzione (punto di minimo).

Per determinare con maggior precisione l'ascissa del punto di minimo è ora necessario ricorrere alla computazione numerica della funzione in un piccolo intorno dell'ascissa del punto rilevato dal grafico.
L'operazione di calcolo si esegue, in base alle necessità, o a bassa precisione o ad elevata precisione:

Nel primo caso si sceglie un intervallo di variabilità della x tale da contenere il valore dell'ascissa del punto notevole stimata sul grafico e si esegue la computazione accettando i risultati che ne conseguono.
Nel secondo caso, visti i risultati del calcolo precedente, si ripete l'operazione per un intervallo della x più piccolo del primo a cavallo della ascissa del punto evidenziata con la prima computazione.
Il nostro esercizio viene svolto, a scopo didattico, su due intervalli:
Il primo intervallo viene fissato attorno al valore rilevato di -.7: da -.8 a -.4 e si esegue il computo mediante il seguente programma

```
CLS ' pulisce lo schermo

FOR x = -.8 TO -.4 STEP .1 ' campo di variabilità di x per il calcolo di 4 punti di y

Y= x ^ 4 + x ^ 3 + x ^ 2 + x + 1 ' funzione da computare

PRINT "x=" ; x ; "y=" ; y ' comando di stampa valori di x affiancati ai corrispondenti valori di y

NEXT x ' comando di ritorno a FOR x= ...
```

F5

```
x = -. 8   y = . 7376
x = -. 7   y = . 6871
x = -. 6   y = . 6736
x = -. 5   y = . 6875
```

F5

il calcolo mostra che il minimo della funzione è più vicino a x = -.6 che non al valore stimato di x = -.7

Se ripetiamo il procedimento di calcolo per un campo più stretto e centrato del primo, con un incremento della x pari ad 1 / 10 del precedente, abbiamo:

```
CLS ' pulisce lo schermo

FOR x = - .65 TO - .55 STEP .01 ' campo di variabilità di x per il calcolo dei punti di y

Y= x ^ 4 + x ^ 3 + x ^ 2 + x + 1 ' funzione da computare

PRINT "x=" ; x ; "y=" ; y ' comando di stampa valori di x affiancati ai corrispondenti valori di y

NEXT x ' comando di ritorno a FOR x= ...
```

F5

tra i valori presentati risulta che l'ordinata più piccola è y = .673577 alla quale corrisponde l'ascissa x = -.61, questa coppia risolve il nostro problema; la funzione ha un minimo di coordinate x = -.61 y = +.673

5.3 Esercitazione grafico-numerica n°2

La funzione che proponiamo per la ricerca dei punti notevoli, diversamente dalla precedente, sarebbe molto laboriosa da derivare con impossibilità pratica di risolvere le equazioni trascendenti ottenute dalle derivate stesse; in questo caso il metodo grafico numerico adottato è l'unico mezzo disponibile per ottenere buoni risultati in tempi estremamente brevi.

La funzione oggetto della nostra ricerca è

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} e^{x/10}$$

che trasformata in simbologia Qbasic diventa

y = ((x ^ 2 - 1) / (x ^ 2 + 1)) * EXP (x / 10)

con essa completiamo il programma grafico:

```
LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )  ' ASSE  Y 4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )  ' ASSE  X 4 quadranti scelti per visualizzare qualsiasi tipo di funzione

LOCATE 10, 66: INPUT "x inizio"  ; i   ' richiesta ingresso estremo inferiore campo variabilità di x

LOCATE 11, 66: INPUT "x fine"    ; f   ' richiesta ingresso estremo superiore campo variabilità di x

LOCATE 12, 66: INPUT "step"      ; p   ' richiesta ingresso valore dell'incremento di x (STEP)

LOCATE 13, 66: INPUT "x-Div."    ; s   ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse x

LOCATE 14, 66: INPUT "y-Div."    ; t   ' richiesta ingresso valore intervallo reticolo asse y

LOCATE 15, 66: PRINT "-sn;+dx"    ' indicazione per l'istruzione successiva relativa allo spostamento
                                  ' a sinistra ( -sn) o a destra ( +dx) rispetto allo zero del tracciato
                                  ' della funzione

LOCATE 16, 66: INPUT "spost.x"   ; g   ' richiesta ingresso entità di spostamento del tracciato della funzione

FOR x = i TO f STEP p  ' variazione della x nel campo stabilito a comando tra (inizio,i) e (fine,f)

y# = ( ( x ^ 2 - 1 ) / ( x ^ 2 + 1 ) ) * EXP ( x / 10 )  ' funzione da studiare espressa a doppia
                                                        ' precisione

r# = ( 16 / t ) * y#   ' calcolo variabile r a doppia precisione per ordinata istruzione PSET
                       ' comprensiva valore di scala stabilito a comando per l'asse y ( lettera t)

IF r# > 160 THEN r# = 160  ' istruzione che evita l'overflow positivo

IF r# < -160 THEN r# = -160  ' istruzione che evita l'overflow negativo

PSET ( 230 - ( 23 / s ) * ( -g ) + ( 23 / s ) * x , 160 - r# ), 15  ' genera il tracciato del grafico
                                           ' della funzione in base al valore di scala
                                           ' stabilito a comando per l'asse x (lettera s) , inoltre sposta il tracciato in base
                                           ' al valore assegnato a comando esterno da "spost.x" tramite la (lettera g)

NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR x = i .....
```

dopo alcuni tentativi si trovano i valori più adatti per la migliore presentazione della funzione

x inizio? -10
x fine? +10
step.? .01
x-Div:? 1
y-Div.? .2
-sn ; +dx
spost. x ? 0

ottenendo il grafico di figura 27, dal grafico si osserva:

-la funzione è in fuga nel campo positivo delle y per x > 7.2
-la funzione tende a zero per x < -10
-nell'intervallo delle ascisse compreso tra - 4 e +1 sono evidenti due punti notevoli
-si ha un punto di minimo nell'intorno di x = 0
-si ha un punto di massimo relativo per x = -3.5 circa

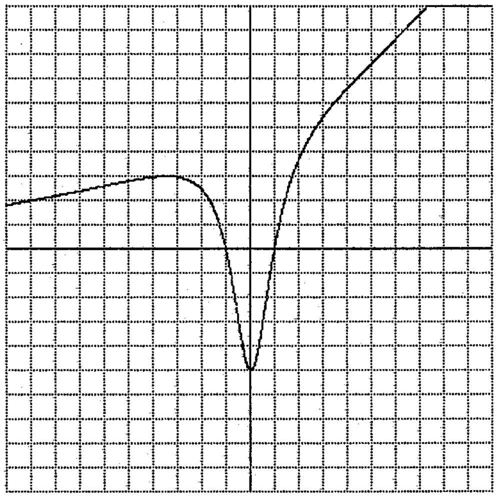

Figura 27
Grafico ricerca punti notevoli
funzione trascendente
Campo di variabilità della x :
da -10 a +10
Scala asse x = 1 / div
Scala asse y = .2 / div.

Per determinare l'ascissa del punto di minimo è ora necessario ricorrere alla computazione numerica della funzione in un piccolo intorno del punto rilevato dal grafico.
L'operazione di calcolo si esegue una sola volta, a bassa precisione, dato che la curva mostra con buona approssimazione la posizione del suo minimo.
L'intervallo viene fissato attorno al valore rilevato di 0: da -.5 a +.5 con incremento pari a .1.

```
CLS ' pulisce lo schermo

FOR x = -.5 TO .5 STEP .1 ' campo di variabilità di x per il calcolo di 10 punti di y

Y = ( ( x ^ 2 - 1 ) / ( x ^ 2 + 1 ) ) * EXP ( x / 10 ) ' funzione da computare        &
```

```
PRINT "x=" ; x ; "y=" ; y ' comando di stampa valori di x affiancati ai corrispondenti valori di y

NEXT x ' comando di ritorno a FOR x= ...
```

F5

dalla serie di coppie x ed y presentate si stabilisce che il minimo della funzione ha, con buona approssimazione, le coordinate $x = 0$ $y = -1$.

F5

Per determinare l'ascissa del punto di massimo si ricorre alla computazione numerica della funzione in un piccolo intorno dell'ascissa del punto rilevato dal grafico.
L'intervallo viene fissato attorno al valore rilevato di - 3.5: da - 4 a - 3 e si esegue il computo mediante il programma

```
CLS ' pulisce lo schermo

FOR x = - 4 TO - 3 STEP .1 ' campo di variabilità di x per il calcolo dei punti di y

Y = ( ( x ^ 2 - 1 ) / ( x ^ 2 + 1 ) ) * EXP ( x / 10 ) ' funzione da computare

PRINT "x=" ; x ; "y=" ; y ' comando di stampa valori di x affiancati ai corrispondenti valori di y

NEXT x ' comando di ritorno a FOR x= ...
```

F5

dalla serie di coppie x ed y presentate si stabilisce che il massimo relativo della funzione ha le coordinate

$x = -3.4$ $y = +.5984311$