

SUL CALCOLO DEL MINIMO NUMERO DI FASCI PREFORMATI PER IL SONAR

ON THE CALCULATION OF THE MINIMUM NUM- BER OF PREFORMED BEAMS FOR SONAR AP- PLICATIONS

Cesare Del Turco

Elsag S.p.A.

Elsag S.p.A.

SOMMARIO

E' sviluppato in queste note un metodo per il calcolo del minimo numero di fasci preformati e della precisione strumentale di interpolazione di un sistema idrofonico ricevente per sonar.

Il metodo si basa sull'esame della caratteristica di direttività di una cortina idrofonica e sulle trasformazioni approssimate della sua funzione matematica in alcune funzioni gaussiane (esponenziali) facilmente manipolabili con le regole classiche dell'analisi infinitesimale.

La caratteristica di direttività, normalmente espressa in dipendenza dalla direzione di provenienza del suono, è prima trasformata nella corrispondente funzione gaussiana per consentire per via grafica l'apprezzamento della "bontà di approssimazione"; successivamente tale funzione è trasformata nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza. La trasformazione in funzione del tempo consente al progettista del sonar una più chiara comprensione del metodo, dato che la scansione dello spazio è vista come scansione dei fasci preformati nel dominio del tempo.

La trasformazione nel dominio della frequenza fornisce al progettista gli strumenti per il calcolo del "filtro di interpolazione" che è parte fondamentale in un sistema a fasci preformati.

Dopo queste basilari trasformazioni il lavoro si articola nella determinazione dell'algoritmo per il calcolo del minimo numero di fasci preformati

SUMMARY

These notes are related to the development of a method for the calculation of the minimum number of preformed beams and the related instrumental interpolation accuracy with relevance to a hydrophonic receiver for Sonar applications.

The method presented is based upon an analysis of the directivity of a hydrophonic array and upon approximate transformations of its mathematical function into a set of Gaussian (exponential) functions which are more readily dealt with through classical infinitesimal analysis rules.

Directivity, usually expressed as a function of the direction of arrival of a sound wave, is first transformed into the corresponding Gaussian so that a graphical evaluation of the approximation error can be made; then the function is transformed into the time and frequency domains. The time transformation gives the Sonar designer a better understanding of the method, as space scanning is visualized as preformed beam scanning in the time domain.

Transformation in the frequency domain gives the designer the tools required to calculate the interpolating filter, which is one of the main constituents of a preformed beam system.

At the end of these basic transformations, work proceeds with the determination of the algorithm which evaluates the minimum number of preformed beams required by the system and with the evaluation of the sampling error. This type of

necessari al sistema e nella valutazione degli errori conseguenti alla campionatura. Questo tipo di errori è una delle molteplici cause che inficiano la precisione di misura nel rilevamento dei bersagli idrofonici.

1. Introduzione

Ad una prima analisi del problema relativo alla determinazione del minimo numero di fasci preformati necessari ad un sistema sonar, per la scoperta panoramica dei bersagli navali, verrebbe spontaneo risolverlo ragionando nel modo seguente: se il sonar deve rivelare la presenza di più bersagli contemporaneamente nell'arco dell'orizzonte, con un errore strumentale non superiore, ad esempio, di $0,5^\circ$, il sistema deve essere progettato con 360 fasci preformati, orientati grado dopo grado, su tutti i 360° .

In questo modo infatti qualsiasi bersaglio potrà essere rilevato con la precisione voluta, o perché la sua direzione coincide con quella di un fascio (in questo caso non si avrà errore strumentale di rilevamento), o perché la sua posizione angolare è comunque collocata tra due fasci adiacenti (in questo caso l'errore massimo di rilevamento non potrà essere maggiore di $0,5^\circ$).

Questa semplice impostazione consentirebbe di raggiungere lo scopo prefissato, ma risulterebbe inutilmente ridondante e troppo costosa.

L'approccio corretto deve invece partire dal presupposto che la caratteristica di direttività di una base idrofonica ricevente può essere "ricostruita" per infinite direzioni dell'orizzonte "campionando" opportunamente lo spazio subacqueo con tanti fasci preformati quanti sono i campioni richiesti secondo il criterio di Nyquist. In tal modo, interpolando tra i campioni, cioè tra i segnali rivelati in uscita dai singoli fasci, si possono ottenere infinite caratteristiche di direttività artificiali comunque orientate in tutto l'arco dell'orizzonte.

2. Esame della caratteristica di direttività di una cortina ricevente

In Fig. 1 è tracciata la caratteristica di direttività artificiale, $C_o(\beta)$, di una base idrofonica circola-

error is one of the many causes of error which affect the measurement accuracy in the detection and location of hydrophonic targets.

1. General

Upon a first approach to the problem of determining the minimum number of preformed beams required by a sonar system to obtain a panoramic detection capability of seaborne targets, one would be tempted to reason as follows: if the sonar has to detect the simultaneous presence of more than one target on the entire horizon azimuth with an instrumented error less than, say, 0.5 deg, the system will have to be designed so as to spread 360 beams, one for each degree, over the full 360 degrees.

Any target will then be detected with the required accuracy, either because its direction of arrival coincides with that of a beam (and in this case there will be no instrumented error associated with detection) or because its azimuth falls between two adjacent beams (in this case the resulting detection error will not exceed 0.5 deg).

This rather simplistic approach would meet the requirement, but it would be largely redundant and far too costly.

The correct approach to the problem should start from the assumption that the directivity of a hydrophonic array can be reconstructed for an infinite number of azimuthal points by sampling the underwater environment with as many preformed beams as required by the Nyquist criteria. Therefore by interpolating between the samples provided by signals detected by each single beam, we can obtain infinite artificial directivity characteristics spread over the entire horizon.

2. Analysis of the directivity of a receiving array

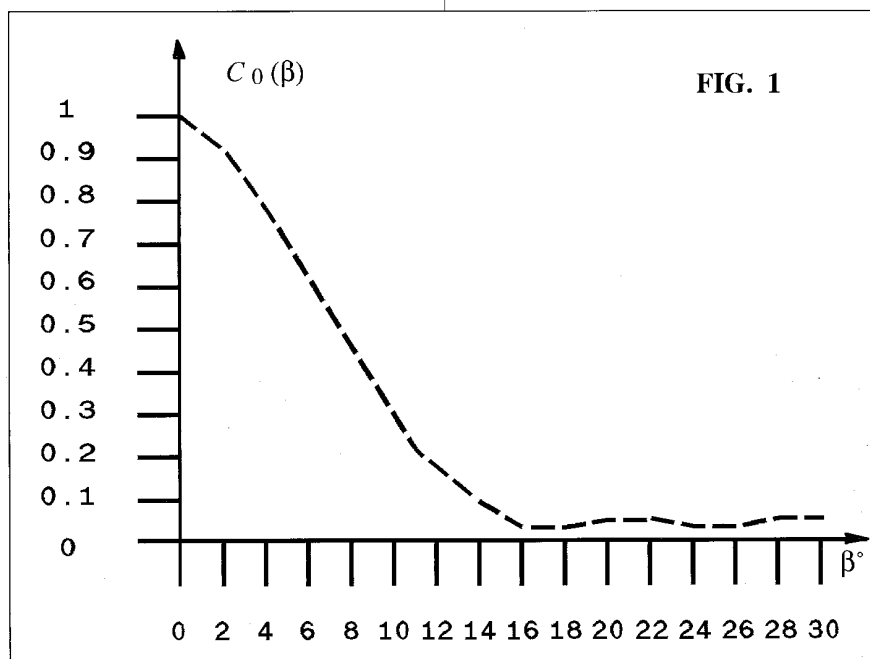
Figure 1 shows the artificial directivity characteristic $C_o(\beta)$ of a circular hydrophonic array,

re, calcolata in una generica banda di frequenza.

Dal grafico si osserva che la caratteristica non si azzerava mai ma ondulava attorno ad un valore medio molto basso; ciò è dovuto al fatto che la base lavora in una banda di rumore. Il livello medio comune a tutte le direzioni può essere trascurato ai fini di una ricerca panoramica dei bersagli: si può pertanto tracciare la curva di direttività normalizzata $C(\beta)$ riportata in Fig. 2.

La curva così ottenuta, definibile da algoritmi complessi, ha un profilo molto simile a quello a campana, caratteristico delle funzioni gaussiane, per cui viene spontaneo tentare la determinazione del parametro esponenziale di una gaussiana per individuare una semplice funzione matematica in grado di riprodurre con buona approssimazione la direttività originale.

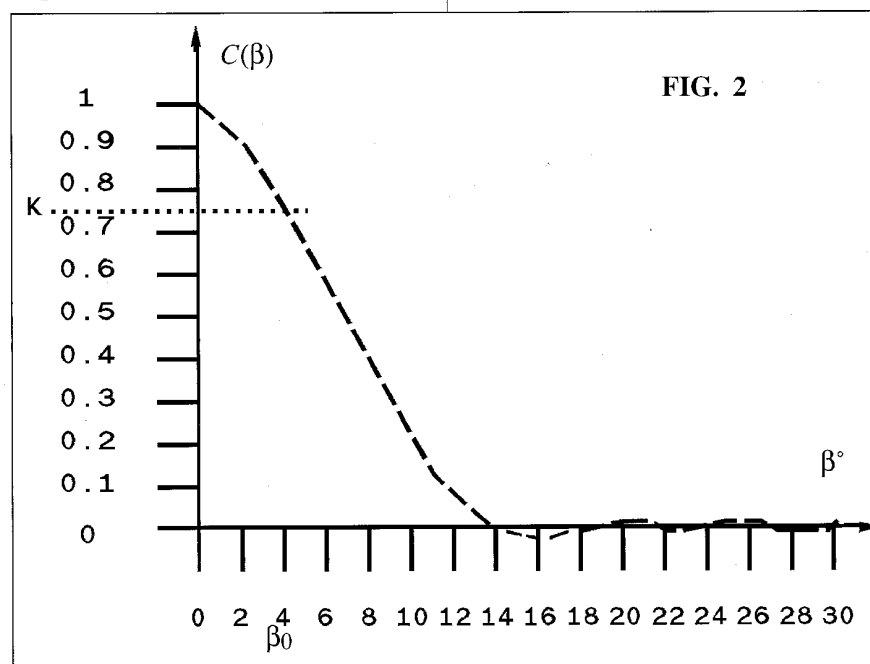
Questo artificio può essere considerato il cardine per tutti gli sviluppi che prenderanno forma nei paragrafi successivi.



calcolata in una generica banda di frequenza. The pattern shows that the directivity value never reaches zero, but oscillates around a very low mean value; this is because the array here operates within a given noise band. The mean value which is common to all directions may be neglected for panoramic target search: we can therefore draw the normalized directivity curve $C(\beta)$ shown in Fig 2.

The curve so obtained, which can be represented by complex algorithms, has a quasi-bell shape, which is characteristic of Gaussian functions, so that one is tempted to find the exponential parameter of a Gaussian to obtain a simple mathematical equation which fits the original directivity pattern with good approximation.

This trick is a starting point for all developments presented in the following.



3. Trasformazione di $C(\beta)$ in funzione gaussiana nel dominio dello spazio

La funzione gaussiana $Y(\beta) = e^{-\lambda\beta^2}$ è stata assunta come trasformazione nel dominio dello spazio della caratteristica di direttività normalizzata $C(\beta)$. Per calcolare il parametro λ , onde ottenere la migliore approssimazione con la $C(\beta)$ da verificare graficamente, si ricavano dalla

Fig. 2 gli elementi relativi alle coordinate β_0 e K nell'ambito del lobo principale. Seguendo gli sviluppi riportati in appendice A1 si ottiene un valore di λ e la trasformazione voluta di $C(\beta)$ che consente di tracciare in Fig. 3, sovrapposta alla caratteristica di direttività, la nuova funzione sostitutiva. Dal

confronto tra le due curve si vede che la nuova funzione rappresenta con notevole precisione la direttività originale, in particolare nella parte più significativa del profilo (zona del massimo) le due curve coincidono; la $Y(\beta)$, con la sola definizione del parametro esponenziale λ , è pertanto in grado di rappresentare tutte le variabili che concorrono alla struttura della caratteristica di direttività originale quali: il diametro della base ricevente, il numero dei sensori idrofonici che costituiscono la base, i valori delle frequenze inferiore e superiore che determinano la banda di lavoro del sistema a fasci preformati del sonar.

La funzione che è stata ora individuata rappresenta il primo passo verso la soluzione del problema che questo lavoro si propone; è necessario infatti ricavare, per esigenze prevalentemente legate ad una logica di sviluppo a carattere tecnico-applicativo, altre due funzioni gaussiane definite ri-

3. Transformation of $C(\beta)$ into a space domain Gaussian function.

The Gaussian function $Y(\beta) = e^{-\lambda\beta^2}$ has been assumed as the space domain transform of the normalized directivity characteristic $C(\beta)$. To calculate parameter λ , so as to obtain the best matching with $C(\beta)$, and to be checked graphically, we have to obtain the main beam coordinates β_0

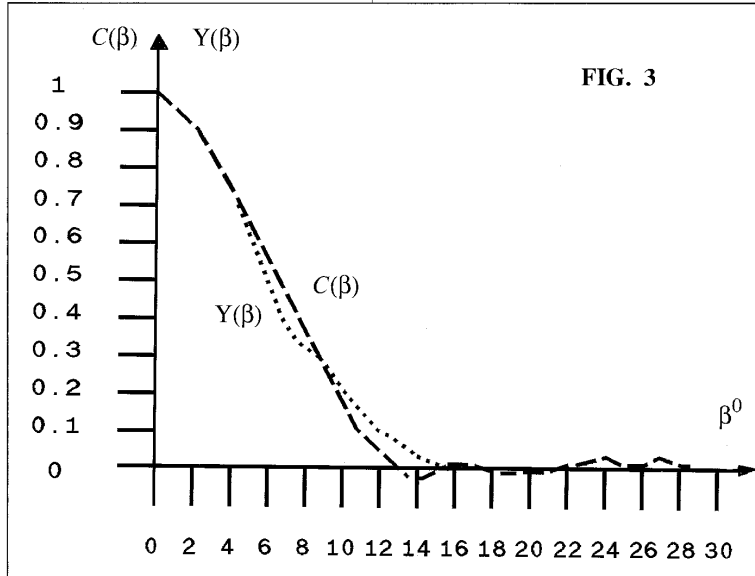


FIG. 3

and K from Fig 2. By following the developments reported in A1, a value for λ and the required transformation for $C(\beta)$ are obtained to achieve a good match with the directivity pattern, as shown in Fig 3. By

comparing the two curves, we can see that the new function matches the original directivity pattern with remarkable accuracy. In particular, in the most significant part of the profile (the peak value) the two curves are a perfect fit. By defining only the exponential parameter λ , $Y(\beta)$ can therefore represent all variables which contribute to the original directivity characteristic, such as diameter of the receiving array, the number of the hydrophonic sensors which make up the array, and the lower and higher frequency values which determine the working band of the sonar preformed beam system.

The function which has now been adopted is the first step towards the solution of the problem which this work is meant to solve. We must now obtain, because of prevailing technical and application reasons, two more Gaussians defined in

spettivamente nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza.

Le due nuove funzioni, che saranno ricavate nei paragrafi successivi, deriveranno semplicemente da $Y(\beta)$ e ciascuna, nell'ambito del proprio dominio di variabilità, rappresenterà sempre la struttura della caratteristica di direttività originale.

4. Trasformazione di $C(\beta)$ in funzione gaussiana nel dominio del tempo

La caratteristica di direttività normalizzata può essere indifferentemente rappresentata dalla gaussiana $Y(\beta)$, funzione dell'angolo, quanto dalla gaussiana funzione del tempo, dato che le due variabili spazio-tempo, in un sistema di scansione sonar, sono legate dalla relazione $T/360^\circ = t/\beta$ (dove T è il tempo stabilito per esplorare i 360° dell'orizzonte).

Con la funzione gaussiana $Y(t) = e^{-\alpha t^2}$ si definisce la trasformazione richiesta della direttività nel dominio del tempo. Il parametro α si ottiene mediante lo sviluppo indicato in appendice A2 che si avvale della semplice relazione spazio-tempo sopra indicata. Questa curva, indispensabile per gli sviluppi successivi, rappresenta anche il limite di perfezione del tracciato che il progettista del sonar potrebbe vedere, su di un sistema di presentazione video tipo A, provando il sonar a fasci preformati, in mare, su bersaglio sintetico. Si è parlato di limite di perfezione perché la $Y(t)$ sarà di fatto approssimata mediante un numero finito di campioni (fasci) che, dopo ricostruzione (interpolazione), forniranno una funzione tanto più uguale a $Y(t)$ quanto più elevato sarà il numero dei campioni stessi.

5. Trasformazione della $C(\beta)$ nel dominio della frequenza

Per determinare l'algoritmo relativo al numero minimo di fasci preformati è necessario conoscere il contenuto spettrale della curva di direttività $Y(t)$ definita in precedenza nel dominio del tempo. E' chiaro infatti che tanto più stretta sarà la caratteristica di direttività originale, nel dominio

the time and frequency domains. The two new functions, which will be derived in the following, come directly from $Y(\beta)$ and each is related to the structure of the original directivity characteristic.

4. Transformation of $C(\beta)$ into a time domain Gaussian

The normalized directivity characteristic may be indifferently represented by the $Y(\beta)$ Gaussian, as a function of angle, or by the Gaussian time function, as space-time variables, within a sonar scanning system, are related by the fact that $T/360^\circ = t/\beta$ (where T is the time required to scan the horizon). The Gaussian function $Y(t) = e^{-\alpha t^2}$ defines the time domain directivity function required. α is obtained by means of the development shown in A2, and it relies upon the simple space-time relation indicated above. This curve, which is absolutely necessary for the developments presented in the following, is also the limit in terms of accuracy for the track which the sonar designer would see on an A type display when using the preformed beam sonar at sea on a synthetic target. We mention an accuracy limit because in fact $Y(t)$ is approximated by a finite number of samples (beams) which, following reconstruction (interpolation), provide a function which is all the closer to $Y(t)$ the greater the number of samples.

5. Transformation of $C(\beta)$ in the frequency domain

To determine the minimum of preformed beams algorithm, it is necessary to know the spectral contents of directivity curve $Y(t)$ previously defined in the time domain. It is a fact that the narrower the original directivity pattern, in the space domain, the narrower the

dello spazio, tanto sarà più stretta la caratteristica di direttività espressa nel dominio del tempo e tanto più ampio sarà il suo spettro: di conseguenza più numerosi dovranno essere i campioni (fasci preformati) richiesti secondo Nyquist per la corretta riproducibilità della curva originale.

Per la determinazione dello spettro della $Y(t)$ si considera la sua trasformata di Fourier $Y(t) \longleftrightarrow Y(\omega)$ che grazie all'impiego di funzioni esponenziali è data semplicemente da:

$$e^{-\alpha t^2} \longleftrightarrow e^{-\omega^2/4\alpha}$$

Dal secondo termine si ottiene l'andamento dello spettro in funzione della pulsazione così come riportato in Fig. 4.

A questo punto ci si può chiedere quanta parte dello spettro sia necessaria alla riproduzione della direttività originale; vedremo in seguito che la precisione ottenibile nel rilevamento dei bersagli sarà intimamente legata alla scelta della frequenza di troncamento dello spettro stesso.

6. Determinazione del numero minimo N dei fasci preformati

Se si assume a priori una limitazione pratica dello spettro di Fig. 4, da F_n in poi, si può esprimere il minimo numero N dei fasci preformati, oltre che in dipendenza dalle caratteristiche intrinseche di $C(\beta)$, anche dall'ampiezza φ che ha la componente spettrale F_n nel punto di troncamento. Se quindi F_n è la massima frequenza dello spettro troncato la frequenza F_c di campionatura, secondo Nyquist, dovrà essere uguale o maggiore a $2F_n$. Secondo queste considerazioni è stato sviluppato

directivity pattern in the time domain and the wider its spectrum: consequently its samples will have to be more numerous (more preformed beams) as required according to Nyquist to obtain a good reproduction of the original curve.

To obtain the $Y(t)$ spectrum, let's now consider its Fourier transform $Y(t) \longleftrightarrow Y(\omega)$ which due to the adoption of exponential functions is simply given by: $e^{-\alpha t^2} \longleftrightarrow e^{-\omega^2/4\alpha}$.

The second term provides the spectrum as a function of pulsation as shown in Fig 4.

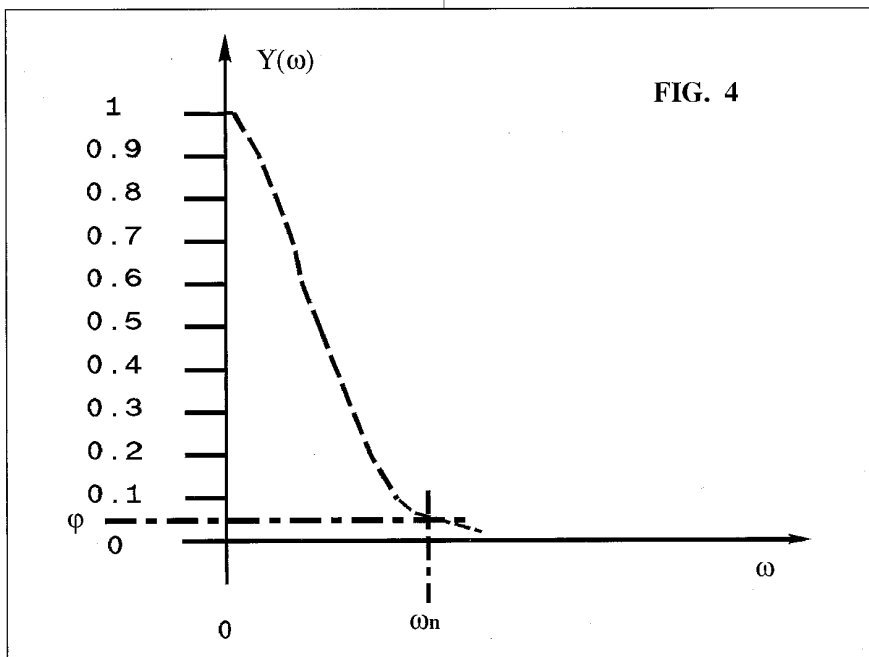


FIG. 4

Now we may evaluate what spectrum portion is required to reproduce the original directivity; in the following we shall see that the accuracy which can be obtained in target detection is closely related to the spectrum cut-off frequency.

6. Determination of the minimum number of preformed beams N

If we assume that a practical limitation to the spectrum shown in figure 4 takes place from F_n onward, we can express the minimum number of preformed beams N as a function of the intrinsic characteristics of $C(\beta)$ and also as a function of amplitude φ which has a spectral component F_n at the cut-off point itself. Therefore if F_n is the maximum frequency of the cut-off spectrum, the sampling frequency F_c must, according to Nyquist, be equal or greater than $2F_n$.

in appendice A3 l'algoritmo generale che consente il calcolo di N in dipendenza da λ (parametro della funzione gaussiana spaziale) e dell'ampiezza φ della componente F_n . La semplicità della formula risolutiva ci consente di estrarla dall'appendice per inserirla direttamente nel testo:

$$N = \frac{720}{\pi} \sqrt{\lambda \ln \frac{1}{\varphi}}$$

L'applicazione di questo algoritmo, pur con le approssimazioni fatte nel contesto di questo lavoro, è stata verificata positivamente in più occasioni nel trattare il problema dei fasci preformati per i sonar. La formula consente il calcolo di N nel presupposto che sia stata fissata a priori la precisione di rilevamento voluta assumendo un adatto valore di φ che, come vedremo in seguito, è la variabile determinante la precisione del sistema.

7. Applicazione della formula per il calcolo di N

E' interessante, a titolo di esempio, mostrare la semplicità di applicazione della formula per il calcolo del minimo numero dei fasci preformati necessario ad un sonar che impieghi la base circolare avente la caratteristica di direttività presa a modello nel paragrafo 2, e definita nell'ambito del lobo principale dalla coppia di coordinate β_0 e K dalle quali è già stato calcolato, vedi appendice A1, il valore di $\lambda = 0.0188$. Supponendo ora di aver già stabilito la precisione strumentale voluta e per conseguenza di aver assunto un valore di $\varphi = 0.01$, si ricava immediatamente il valore di N : $N = \frac{720}{\pi} \sqrt{0.0188 \ln \frac{1}{0.01}} \approx 67$

Questo risultato indica in 67 il minimo numero di fasci che dobbiamo assegnare al sonar, un fascio ogni 5.37° dell'orizzonte.

Per ragioni di carattere costruttivo del sistema a fasci preformati sarà utile aumentare di poco il numero dei fasci, da 67 a 72, in modo da realizzare una struttura perfettamente simmetrica con un fascio ogni 5° dell'orizzonte. E' evidente che per la ricerca della simmetria è più opportuno aumentare il numero dei fasci invece che diminuirlo, in modo da migliorare, anche se di poco, la precisione finale.

A3 develops the general algorithm along these lines so that N can be calculated from λ (a parameter of the space domain Gaussian function) and from amplitude φ of component F_n .

The simplicity of the resolution formula is such that it can be inserted directly into the text:

$$N = \frac{720}{\pi} \sqrt{\lambda \ln \frac{1}{\varphi}}$$

The application of this algorithm, even with the approximations made within this paper, has been quite often successfully verified when dealing with the problem of sonar preformed beams. Through the formula, it is in fact possible to calculate N providing the detection accuracy required has been set by fixing a suitable value for φ , which as we shall see in the following is the variable which sets system accuracy.

7. Application of the formula to the calculation of N

For illustrative purposes it is interesting to see how simple it is to apply the formula to the calculation of the minimum number of preformed beams required for a sonar adopting a circular array with the same directivity as assumed in Par. 2. As Figure 2 shows, this characteristic is defined for the main lobe by coordinates β_0 and K , from which the value for λ has been calculated as 0.0188, as shown in A1. Lets now suppose that the required instrumental accuracy has already been set, and that therefore a value for $\varphi = 0.01$ has also been set. It follows that the value of N is:

$$N = \frac{720}{\pi} \sqrt{0.0188 \ln \frac{1}{0.01}} \approx 67$$

This result sets as 67 the minimum number of preformed beams which are required by the sonar, equal to a beam every 5.37 Deg at the horizon.

For reasons due to manufacturing convenience of the preformed beam system, it is useful to slightly increase the number of the beams from 67 to 72, so that a perfectly symmetrical system results with a beam every 5 Deg on the horizon. Quite clearly the symmetry requirement is better satisfied by increasing the number of beams rather than diminishing them, so that the end accuracy is slightly better.

8. Determinazione della precisione di rilevamento

La precisione strumentale nel rilevamento del bersaglio con un sistema a fasci preformati dipende principalmente dalla precisione di ricostruzione della direttività originale che si ottiene mediante l'elaborazione dei segnali in uscita dal sistema.

La ricostruzione viene eseguita nel dominio della frequenza serializzando i segnali di uscita dai diversi fasci scanditi nel tempo. Si deve pertanto studiare lo spettro di $Y(t)$ dopo la serializzazione dei campioni (fasci).

8.1. Studio dello spettro di $Y(t)$ dopo serializzazione

Il problema si affronta inizialmente con un esame delle caratteristiche spettrali che $Y(\omega)$ viene ad avere dopo la serializzazione dei campioni di $Y(t)$. Infatti, a seguito del campionamento, lo spettro di $Y(t)$ si modifica sostanzialmente e nuove considerazioni devono essere fatte per chiarire gli effetti provocati dal campionamento stesso. A questo fine, impiegando sempre gli elementi significativi della caratteristica di direttività normalizzata, in appendice A4 viene determinata numericamente, sotto certe condizioni del tempo di scansione dei fasci, la funzione di direttività

nel dominio della frequenza ed il valore che deve avere la frequenza di campionatura F_c in dipendenza dalle caratteristiche della base idrofonica e dall'ampiezza della frequenza di troncamento. Quanto sopra consente di tracciare, in

Fig. 5, lo spettro di $Y(t)$ dopo campionatura, evi-

8. Detection accuracy calculation

The instrumental accuracy for target detection by adopting a preformed beam system is mainly based upon the reconstruction accuracy of the original directivity obtained by processing the signals output by the system.

Reconstruction is performed in the frequency domain by serializing the signals output by the beams activated sequentially. We therefore need to study the spectrum of $Y(t)$ following sample serialization.

8.1. Examination of the spectrum of $Y(t)$ following serialization

This problem is first faced by examining the spectral characteristics of $Y(\omega)$ after $Y(t)$ samples serialization. In fact upon serialization, the spectrum of $Y(t)$ changes substantially and new considerations need to be made to clarify the effects due to sampling. For this purpose, still adopting the significant parameters of the normalized directivity, A4 presents the numerical calculation of the frequency domain. This is performed under specific beam scan period and the value required for the sampling frequency F_c is derived as a result of the hydrophonic array characteristics

and of the value for the cut-off frequency. Fig 5 shows the spectrum of $Y(t)$ after sampling, highlighting the value of F_n and F_c . The diagram shows that the new spectrum consists of two parts, one extending into the low frequencies, corresponding

ing to the original spectrum and a part which

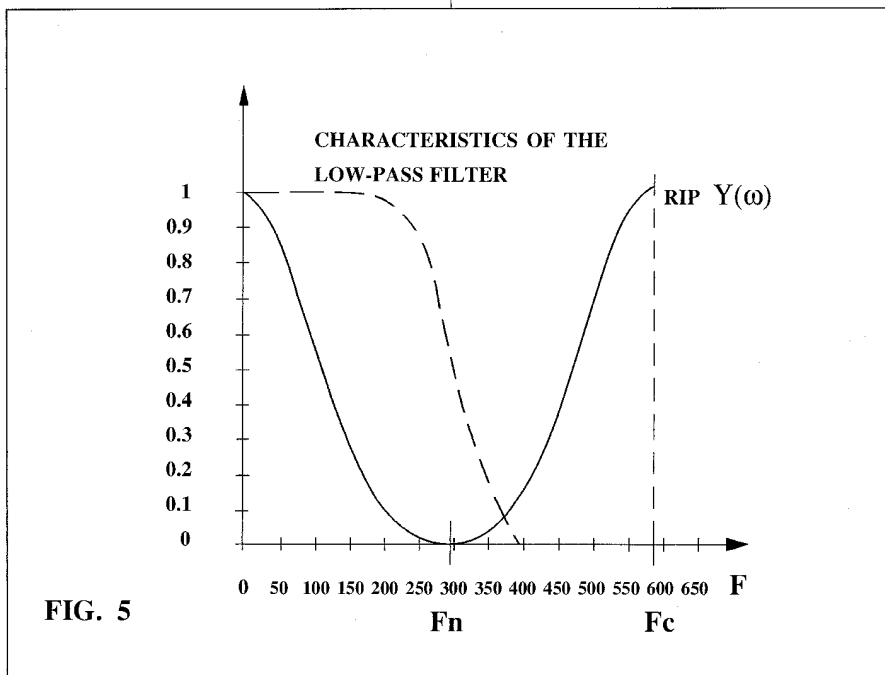


FIG. 5

denziando tanto il valore di F_n che il valore di F_c . Dalla curva si osserva che il nuovo spettro $Y(\omega)$ è formato da due parti, la parte che si estende nel campo delle frequenze basse, che corrisponde allo spettro originale e la parte che si estende nel campo delle frequenze più alte: questa parte anomala è detta "ripetuta di $Y(\omega)$ ".

Per ottimizzare la riproducibilità della caratteristica originale è necessario eliminare dallo spettro di campionatura, con azione di un filtro passa basso (filtro di interpolazione), la ripetuta di $Y(\omega)$, vedi profilo a tratto in Fig. 5, accettando, come elemento di distorsione dello spettro significativo, quella parte della ripetuta che, attorno a F_n , interseca la parte buona dello spettro. E' evidente che la distorsione sarà tanto più contenuta quanto la F_c sarà lontana da F_n , cioè quanto più saranno numerosi i fasci preformati impiegati nel sistema.

8.2. Ricerca dell'algoritmo per il calcolo della precisione

Cerchiamo ora di stabilire una relazione tra il valore di φ che compare nella formula del paragrafo 7 e la precisione ottenibile nella ricostruzione (interpolazione) della caratteristica di direttività. E' utile ricordare che φ rappresenta l'ampiezza dello spettro $Y(\omega)$ alla frequenza F_n che, come abbiamo visto in Fig. 5, è il punto critico di interferenza tra la $Y(\omega)$ e la sua ripetuta. Tanto più lontana sarà F_c rispetto a F_n , tanto più si potrà scegliere un valore piccolo di φ , aumentando di conseguenza la precisione di ricostruzione.

Iniziamo con l'osservare che la precisione di ricostruzione interessa prevalentemente la posizione del max della caratteristica di direttività $Y(\beta)$ perché è dalla posizione di tale max che si deduce il valore di β che corrisponde alla posizione angolare del bersaglio. Considerando la serie temporale ottenuta per campionamento della $Y(t)$ è possibile scrivere la formula per la ricostruzione del segnale campionato così come riportato in appendice A5. La formula trovata è del tipo trascendente; non si presta pertanto agevolmente agli sviluppi matematici necessari per individuare in essa la posizione angolare del max della caratteristica che ci consente di dedurre l'errore di ricostruzione commesso. L'ostacolo viene superato con l'aiuto di un computer che ricerca sulla formula trovata, per elaborazioni successive, la posizione approssimata del max

extends into the higher frequencies: this unusual part is known as a replica of $Y(\omega)$.

To optimize the reproducibility of the original characteristic we have to eliminate the $Y(\omega)$ replica from the sampling spectrum by means of a low pass filter (interpolation filter), as shown in the dashed line diagram of figure 5. Here we accept the distortion element of the significant spectrum as that part of the replica which intersects the good part of the spectrum around F_n . It is clear that the distortion will be more acceptable the more numerous the number of preformed beams adopted by the system.

8.2. Derivation of the algorithm for accuracy calculations

Lets now try to establish a relationship between the value for φ , which appears in the formula of Par. 7 and the accuracy obtainable by reconstruction of the directivity characteristic. It is worth noting that φ is the amplitude of spectrum $Y(\omega)$ at frequency F_n , which as we have seen in Figure 5, is the critical interference point between $Y(\omega)$ and its replica. The further away F_c from F_n , the smaller the value for φ , resulting in better reconstruction accuracy.

Lets start by noting that the reconstruction accuracy regards mainly the position of the maximum of the directivity function $Y(\beta)$, because it is from such maximum that we can calculate the value for β which corresponds to the target azimuth.

By considering the time series obtained by sampling $Y(t)$, it is possible to write the formula for the reconstruction of the sampled signal as presented in A5. The formula derived is transcendental and therefore does not easily adapt to the mathematical developments required to trace the angle of maximum amplitude, from which we can obtain the reconstruction error. This obstacle is passed by adopting a computer which finds the required solution by successive iterations, identifying the approximate position of the maximum directivity.

The computer analysis shows that the reconstruc-

della curva di direttività.

Dall'analisi a calcolatore si osserva che l'errore di ricostruzione (errore di puntamento) è tanto più grande quanto è piccola la F_c e che dipende inoltre dalla posizione dei campioni rispetto alla posizione angolare del bersaglio.

I risultati complessivi delle elaborazioni di macchina sono stati prima tradotti in termini di frequenza di campionatura in funzione dell'errore e successivamente in ampiezza φ della frequenza di troncamento in funzione dell'errore di puntamento.

Il grafico di Fig. 6 sintetizza i risultati ottenuti con il computer per un sistema di fasci preformati asservito alla base circolare presa ad esempio per questa analisi.

Il grafico ha in ascissa l'errore angolare $\Delta\beta$ e in ordinata i valori di φ . Esso consente, nel caso della $C(\beta)$ presa in esame, di determinare l'errore $\Delta\beta$ che consegue dall'aver assunto un particolare valore di φ in base a certe ipotesi semplificative; per $\varphi = 0.01$ risulta che l'errore massimo di riproduzione nella direzione interpolata sarà $\Delta\beta = 0.04^\circ$.

I risultati di questi calcoli mettono in evidenza la grande importanza della metodologia adottata; infatti nell'esempio mostrato con 72 fasci preformati si possono ottenere rilevamenti strumentali con errori non superiori a 0.04° per tutte le direzioni dell'orizzonte.

La funzione di Fig. 6 può essere impiegata anche per la soluzione del problema della determinazione del minimo numero dei fasci preformati una volta fissata a priori la precisione strumentale che si desidera.

Infatti, se con la base circolare caratterizzata dalla direttività $C(\beta)$ si vuole realizzare un ricevitore a

tion error (pointing error) increases with decreasing F_c and that it furthermore depends on the position of the samples with respect to the target azimuth. The overall results of the processing have been at first converted to sampling frequency as a function of total error and then in terms of amplitude φ of the cut-off frequency as a function of the pointing error.

The diagram in Figure 6 collects the results obtained by the computer for a preformed beam system servoed to the circular array taken as an example for this analysis.

The diagram shows in abscissa angular error $\Delta\beta$ and in ordinates the value of φ .

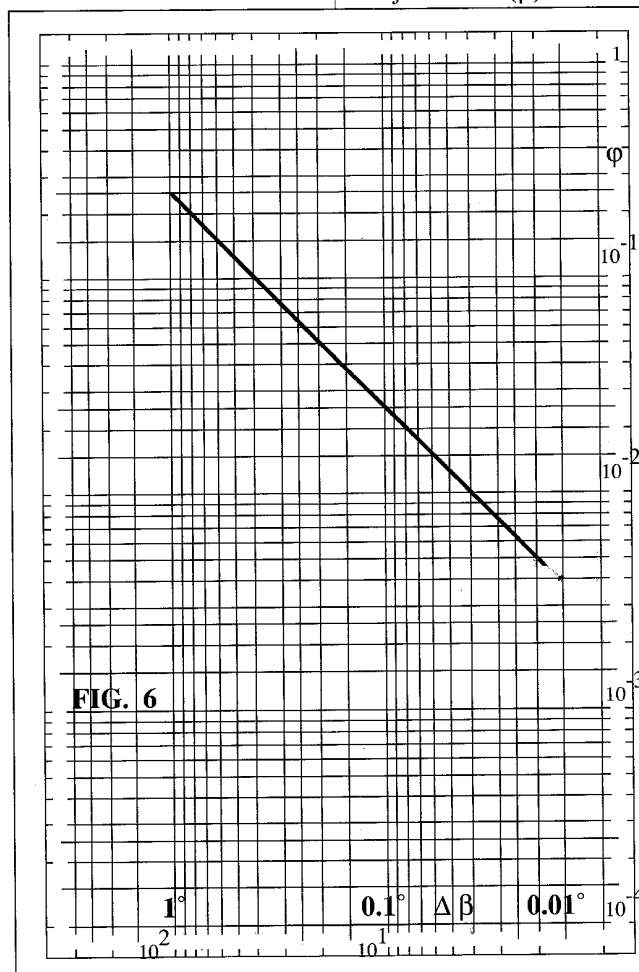
Such diagram gives us a way to calculate $\Delta\beta$ error for the $C(\beta)$ examined, due to the fact that a

particular value for φ was taken on the basis of simplified assumptions; for $\varphi = 0.01$ the maximum reproduction error in the interpolated direction will be equal to $\Delta\beta = 0.04$ Deg.

The results of these calculations highlight the great importance of the method adopted; in fact in the example shown, with only 72 preformed beams we can obtain instrumental errors not greater than 0.04 Deg for all directions at the horizon.

The function shown in Figure 6 may also be adopted for the solution of the problem of determining the minimum number of preformed beams required once the instrumental accuracy limits have been set.

In fact if with the circular array with directivity $C(\beta)$ we want to obtain a preformed beam receiver which can assure a target pointing error of 0.5 Deg, the method is as follows: from the graph in Figure 6, for $\Delta\beta = 0.5$ Deg, we obtain the corresponding value for $\varphi = 0.12$, which inserted into the formula of



fasci preformati in grado di assicurare ad esempio una precisione di puntamento del bersaglio di 0.5° , si procede come segue: dal grafico di Fig. 6 per $\Delta\beta = 0.5^\circ$ si ricava il corrispondente valore di $\varphi = 0.12$ che inserito nella formula del paragrafo 6, per $\lambda = 0.0188$ (relativo alla $C(\beta)$), consente di calcolare semplicemente il valore di $N = 45$ a cui corrisponde un fascio ogni 8° dell'orizzonte.

9. Conclusioni

I metodi di calcolo sviluppati nei paragrafi precedenti, data la loro sintetica struttura, consentono di affrontare semplicemente il problema della determinazione del minimo numero dei fasci preformati e della precisione strumentale di un generico sistema direttivo. Con questi metodi il progettista può rapidamente inquadrare il suo obiettivo scegliendo la soluzione tecnica che più si adatta alle esigenze del progetto generale del sistema: realizzare una struttura a fasci preformati "ridotta", con vantaggi in termini di costo e ingombro, pagando il prezzo di una bassa precisione, o realizzare una struttura "a misura" con il vantaggio di una buona precisione in cambio di costi ed ingombri elevati.

Appendice

Sono fissate nel seguente prospetto le variabili che saranno impiegate negli sviluppi in appendice:

$C(\beta)$

caratteristica di direttività normalizzata in funzione dell'angolo di puntamento β ;

K

ampiezza di $C(\beta)$ per $\beta = \beta_0$ (assegnato a piacere);

$$Y(\beta) = e^{-\lambda\beta^2}$$

funzione gaussiana spaziale rappresentativa di $C(\beta)$;

$$Y(t) = e^{-\alpha t^2}$$

funzione gaussiana temporale rappre-

Par. 6, for $\lambda = 0.0188$ (for $C(\beta)$) provides the value for $N = 45$, corresponding to a beam every 8° on the horizon.

9. Conclusions

The calculation methods developed in the previous paragraphs, due to their simplicity, give us a tool with which the determination of the minimum number of preformed beams and ensuing angle accuracy can be faced with confidence. Through this method the designer can rapidly set his target by selecting the technical solution which more readily adapts to the needs of system general development: design a preformed beam structure minimized in terms of cost and dimensions, at the cost of low accuracy, or alternatively design a system as a trade-off between good accuracy and consequential high cost and dimensions.

Appendix

A list of the variables used throughout the document is given in the following:

$C(\beta)$

normalized directivity as a function of pointing angle β .

K

amplitude of $C(\beta)$ for $\beta = \beta_0$ (any value)

$$Y(\beta) = e^{-\lambda\beta^2}$$

Gaussian space function representative of $C(\beta)$

$$Y(t) = e^{-\alpha t^2}$$

Gaussian time function representative of $C(\beta)$

$$Y(\omega) = e^{-\omega^2/4\alpha}$$

sentativa di $C(\beta)$;

$Y(\omega) = e^{-\omega^2/4\alpha}$
trasformata di Fourier di $Y(t)$;

F_n
frequenza di $Y(\omega)$ a cui corrisponde
una ampiezza φ ;

$F_c = 2F_n$
frequenza di campionatura;

φ
ampiezza della componente spettrale
 F_n ;

$\Delta t = \frac{1}{F_c}$
intervallo temporale di campionatura;

N
numero minimo dei fasci preformati.

T
tempo di esplorazione

A1

Per definire la funzione $Y(\omega) = e^{-\lambda\beta^2}$ si ricava λ partendo dalle generiche coordinate β_o e K di $C(\beta)$: essendo $C(\beta_o) = K$ sarà $K = e^{-\lambda\beta_o^2}$ da cui $\lambda\beta_o^2 = \ln \frac{1}{K}$ cioè $\lambda = \frac{1}{\beta_o^2} \ln \frac{1}{K}$ perciò sarà:

$$Y(\beta) = \exp - \left(\frac{1}{\beta_o^2} \ln \frac{1}{K} \right) \beta^2$$

Calcolando λ per $\beta_o = 4^\circ$ e $K = 0.74$ si ha $\lambda = 0.0188$ e $Y(\beta) = \exp - 0.0188 \beta^2$

A2

Per definire la funzione $Y(t) = e^{-\alpha t^2}$ si ricava α nel seguente modo:

per un dato valore β_o di β , preso nell'ambito del lobo principale di $C(\beta)$, sarà $C(\beta_o) = K$ (vedi Fig.

2) cioè $Y(t_o) = e^{-\alpha t_o^2} = K$ da cui

Fourier transform of $Y(t)$

F_n
 $Y(\omega)$ frequency corresponding to amplitude φ

$F_c = 2F_n$
sampling frequency

φ
amplitude of spectral component F_n

$\Delta t = \frac{1}{F_c}$
sampling time interval

N
minimum number of preformed beams.

T
scan time

A1

To define the function $Y(\omega) = e^{-\lambda\beta^2}$ we first obtain λ starting from the generic coordinates β_o and K of $C(\beta)$: as $C(\beta_o) = K$, it results that $K = e^{-\lambda\beta_o^2}$, from which it results that $\lambda\beta_o^2 = \ln \frac{1}{K}$, i.e. $\lambda = \frac{1}{\beta_o^2} \ln \frac{1}{K}$, so that

$$Y(\beta) = \exp - \left(\frac{1}{\beta_o^2} \ln \frac{1}{K} \right) \beta^2$$

Calculating λ for $\beta_o = 4$ Deg and $K = 0.74$ we have $\lambda = 0.0188$ and $Y(\beta) = \exp - 0.0188 \beta^2$

A2

To define the function $Y(t) = e^{-\alpha t^2}$ we obtain α as follows:

for a given value β_o of β , taken within the main lobe of $C(\beta)$, it results that $C(\beta_o) = K$ (see figure 2), which also means $Y(t_o) = e^{-\alpha t_o^2} = K$, from which

$$\alpha t_o^2 = \ln \frac{1}{K} \quad (1)$$

Dato che sussiste la relazione $\frac{T}{360} = \frac{t}{\beta}$ si ha:

$t = \frac{\beta T}{360}$ e $t_o = \frac{\beta_o T}{360}$ che sostituito nella (1) dà:

$$\alpha = \ln \frac{1}{K} \left(\frac{360}{\beta_o T} \right)^2$$

$$\text{cioè } Y(t) = \exp - \ln \frac{1}{K} \left(\frac{360}{\beta_o T} \right)^2 t^2$$

Per $\beta_o = 4^\circ$ e $K = 0.74$, assumendo a piacere un tempo di esplorazione di 0.115 sec (il tempo può essere fissato a piacere dal progettista in base ad esigenze diverse), il valore di α sarà: $\alpha = 1.84 * 10^5$ e $Y(t) = \exp - 1.84 * 10^5 * t^2$

A3

Per la determinazione dell'algorithm che definisce N si procede come segue: detta φ l'ampiezza della componente armonica di pulsazione ω_n si

può scrivere $Y(\omega_n) = \exp - \frac{\omega_n^2}{4\alpha} = \varphi$ da cui si ri-

cava $\omega_n^2 = 4\alpha \ln \frac{1}{\varphi}$ e

$$F_n = \frac{\sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\varphi}}}{\pi} \quad (1)$$

Se F_n è la massima frequenza dello spettro limitato la frequenza di campionatura sarà $F_c \geq 2F_n$ e l'intervallo temporale tra due campioni successivi $\Delta t = \frac{1}{2F_n}$, se sostituiamo in questa espressione il valore di F_n calcolato nella (1) otteniamo:

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\varphi}}} \quad (2)$$

osservando che Δt è l'intervallo temporale che intercorre tra l'esplorazione di due fasci successivi si può scrivere $T = N\Delta t$, ricordando che $t = \frac{\beta T}{360}$ che per $\beta = \beta_o$ diventa $t_o = \frac{\beta_o T}{360}$ in cui sostituendo il valore di T indicato sopra diventa:

As the following relationship also subsists $\frac{T}{360} = \frac{t}{\beta}$ we have $t = \frac{\beta T}{360}$ and also $t_o = \frac{\beta_o T}{360}$,

which replaced in (1) gives: $\alpha = \ln \frac{1}{K} \left(\frac{360}{\beta_o T} \right)^2$,

which is to say $Y(t) = \exp - \ln \frac{1}{K} \left(\frac{360}{\beta_o T} \right)^2 t^2$

For $\beta_o = 4^\circ$ and $K = 0.74$, by taking any value for the exploration time, such as 0.115 sec (such time may be any value chosen by the designer according to a number of requirements) the resulting value for α will be $\alpha = 1.84 * 10^5$ and $Y(t) = \exp - 1.84 * 10^5 * t^2$

A3

For the determination of the algorithm which defines N , we proceed as follows: set φ to be the amplitude of the ω_n pulsation harmonic, we may

write that $Y(\omega_n) = \exp - \frac{\omega_n^2}{4\alpha} = \varphi$, from which it

results that $\omega_n^2 = 4\alpha \ln \frac{1}{\varphi}$ and

If F_n is the maximum frequency of the cut-off spectrum, sampling frequency shall be $F_c \geq 2F_n$ and the time interval between two adjacent samples will be $\Delta t = \frac{1}{2F_n}$. If we replace such value for F_n as calculated in (1) into the formula we have:

and noting that Δt is the time interval between the scan of two contiguous beams, we may write that $T = N\Delta t$, and recalling that $t = \frac{\beta T}{360}$, where $\beta = \beta_o$ becomes $t_o = \frac{\beta_o T}{360}$, and by replacing the value for T shown above we have

$$t_o = \frac{\beta_o}{360} N \Delta t \quad (3)$$

Se ora sostituiamo la (2) nella (3) otteniamo:

$$t_o = \frac{\beta_o}{360} N \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\varphi}}}$$

quadrando il primo ed il secondo membro si ha:

$$t_o^2 = \left(\frac{\beta_o N \pi}{720} \right)^2 \frac{1}{\alpha \ln \frac{1}{\varphi}}$$

$$\text{cioè } \alpha t_o^2 = \left(\frac{\beta_o N \pi}{720} \right)^2 \frac{1}{\ln \frac{1}{\varphi}},$$

dato che $\alpha t_o^2 = \ln \frac{1}{K}$ (vedi A2) si ha:

$$\ln \frac{1}{K} = \left(\frac{\beta_o N \pi}{720} \right)^2 \frac{1}{\ln \frac{1}{\varphi}}$$

ed infine sviluppando si ottiene:

$$N = \frac{720}{\pi} \sqrt{\frac{\ln \frac{1}{K}}{(\beta_o)^2 \ln \frac{1}{\varphi}}} = \frac{720}{\pi} \sqrt{\lambda \ln \frac{1}{\varphi}}$$

A4

Per definire la funzione spettrale

$Y(\omega) = e^{-\omega^2/4\alpha}$ assumendo il tempo di esplorazione precedentemente stabilito ($T = 0.115$ sec) con $\beta_o = 4^\circ$, $K = 0.74$ e $\alpha = 1.84 * 10^5$ (calcolato in A2) si ha $Y(\omega) = \exp - \frac{\omega^2}{4 * 1.84 * 10^5}$

Per tracciare il grafico di Fig. 5 deve essere calcolato il valore della frequenza di campionatura $F_c \geq 2 F_n$ secondo l'espressione di F_n già esplicitata in A3:

$$F_c = 2 F_n = \frac{2 \sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\varphi}}}{\pi}; \text{ per } \varphi = 0.01$$

$$F_c = \frac{2 \sqrt{1.84 * 10^5 \ln \frac{1}{0.01}}}{\pi} \approx 586 \text{ Hz}$$

A5

Determinazione della precisione di ricostruzione. Per la determinazione della precisione di ricostruzione (interpolazione) si procede nel modo seguente: detta $S(n\Delta t)$ la serie temporale ottenuta per campionamento della $Y(t)$ la formula per la ricostruzione del segnale campionato è:

If we now replace (2) into (3) we have:

$$t_o = \frac{\beta_o}{360} N \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\varphi}}}$$

squaring the first and the second member we have:

$$t_o^2 = \left(\frac{\beta_o N \pi}{720} \right)^2 \frac{1}{\alpha \ln \frac{1}{\varphi}}$$

$$\text{i.e equal to: } \alpha t_o^2 = \left(\frac{\beta_o N \pi}{720} \right)^2 \frac{1}{\ln \frac{1}{\varphi}},$$

and as } \alpha t_o^2 = \ln \frac{1}{K} \text{ (see A2) we have:}

$$\ln \frac{1}{K} = \left(\frac{\beta_o N \pi}{720} \right)^2 \frac{1}{\ln \frac{1}{\varphi}}$$

and finally we have that:

$$N = \frac{720}{\pi} \sqrt{\frac{\ln \frac{1}{K}}{(\beta_o)^2 \ln \frac{1}{\varphi}}} = \frac{720}{\pi} \sqrt{\lambda \ln \frac{1}{\varphi}}$$

A4

*By defining spectral function } Y(\omega) = e^{-\omega^2/4\alpha}, \text{ by taking the previously established scan time equal to } T = 0.115 \text{ sec, with } \beta_o = 4^\circ, K = 0.74 \text{ and } \alpha = 1.84 * 10^5 \text{ (calculated in A2), we have}*

$$Y(\omega) = \exp - \frac{\omega^2}{4 * 1.84 * 10^5}$$

To calculate the graph shown in figure 5 the sampling frequency } F_c \geq 2 F_n \text{ must be calculated according to form of } F_n \text{ which has already been written in A3:}

$$F_c = 2 F_n = \frac{2 \sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\varphi}}}{\pi}; \text{ for } \varphi = 0.01$$

$$F_c = \frac{2 \sqrt{1.84 * 10^5 \ln \frac{1}{0.01}}}{\pi} \approx 586 \text{ Hz}$$

A5

Determination of the reconstruction accuracy . For the accuracy reconstruction determination (interpolation) we follow the method illustrated hereby.

If } S(n\Delta t) \text{ is the time series obtained by sampling } Y(t), \text{ the formula for the reconstruction of the sampled signal is:}

$$Y_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\Delta t) \frac{\sin \pi Fc (t - n/Fc)}{\pi Fc (t - n/Fc)} \quad (1)$$

dove $Fc = 2Fn$ e Δt è l'intervallo di campionatura. Osservando che nell'ambito dei primi zeri del lobo principale di $C(\beta)$ la caratteristica è completamente definita e che al di fuori di questo ambito i valori che compaiono non sono più significativi la (1) può essere espressa con un numero finito di termini:

$$Y_*(t) = \sum_{n=1}^M S(n\Delta t) \frac{\sin \pi Fc (t - n/Fc)}{\pi Fc (t - n/Fc)} \quad (2)$$

Prendiamo in esame la caratteristica di direttività presa come esempio per i calcoli del paragrafo 7 in questo caso si ha: $Y(t) = e^{-1.84 * 10^5 t^2}$ che per una generica direzione in t_1 diventa:

$$Y(t) = e^{-1.84 * 10^5 * (t - t_1)^2}$$

Campionando questo segnale otteniamo per $S(n\Delta t)$:

$$S(n\Delta t) = e^{-\alpha (\Delta t * n - t_1)^2} = e^{-1.84 * 10^5 (n/Fc - t_1)^2}$$

dove t_1 è la posizione temporale che nella rappresentativa $Y(\beta)$, corrisponde a β_1 (direzione da interpolare).

Se supponiamo di avere il valore β_1 ad una posizione temporale $t_1 = 5.12msec$ rispetto all'origine dei tempi si ha:

$$S(n\Delta t) = e^{-1.84 * 10^5 (n/Fc - 5.12 * 10^{-3})^2} \quad (3)$$

Con l'ausilio del calcolatore impiegando la (2) e la (3) con $M = 6$, cioè per sommatorie di 6 termini, ed in funzione dei diversi valori di Fc si calcolano i valori di $t = t_a$ (t_a = posizione temporale approssimata di t_1) a cui corrisponde il massimo della $Y_*(t)$.

Si osserva che l'errore $\epsilon = (t_1 - t_a)$ è dipendente da Fc e dalla posizione di t_1 rispetto alla posizione temporale dei campioni. Per questa ragione, per ciascun valore generico di Fc , si deve calcolare l'errore max in dipendenza della posizione di t_1 rispetto alla posizione temporale dei campioni. Trovato questo errore lo si associa come errore max di ricostruzione, dovuto alla generica frequenza di campionatura Fc . Si calcolano pertanto

where $Fc = 2Fn$ and Δt is the sampling interval.

By noting that within the first nulls of the main lobe of $C(\beta)$, the characteristic is fully defined and that outside this range, the values appearing are of no significance, so that (1) may be written as a finite number of terms:

Lets now examine the directivity feature as an example of the calculations of Par. 7). In this case we have that $Y(t) = e^{-1.84 * 10^5 t^2}$, which in a given direction t_1 becomes:

$$Y(t) = e^{-1.84 * 10^5 * (t - t_1)^2}$$

By sampling this signal we have that

$$S(n\Delta t) = e^{-\alpha (\Delta t * n - t_1)^2} = e^{-1.84 * 10^5 (n/Fc - t_1)^2}$$

where t_1 is the time at which in the $Y(\beta)$ corresponds to β_1 (direction to be interpolated).

If we assume as known the value of β_1 at a given time position $t_1 = 5.12msec$ from the time reference, we have that:

By utilizing the computer and (2) and (3) with $M = 6$, i.e. for summation of six terms and for the different values of Fc , we can calculate the values for $t = t_a$ (where t_a is the approximate time position of t_1) which identify a maximum for $Y_*(t)$.

We may note that error $\epsilon = (t_1 - t_a)$ depends on Fc and on the position of t_1 with respect to the time position of the samples. For this reason, for each generic value of Fc , we have to calculate the maximum error as a function of the position of t_1 within the samples timeframe. Once this error is found, it can be associated as a maximum reconstruction error due to the generic sampling frequency Fc . We therefore proceed with the

i valori di ε massimi in dipendenza della posizione relativa tra t_1 ed i campioni ed in funzione di F_c .

I risultati di macchina sono stati prima tradotti in termini di frequenza di campionatura in funzione dell'errore $\varepsilon = (t_1 - t_a)$ e successivamente in ampiezza φ della frequenza di troncamento dello spettro di $Y(\omega)$ in funzione dell'errore di puntamento $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_a$.

calculation of the maximum value of ε as a function of the relative position of t_1 and the samples, as a function of F_c .

The raw data is first converted into sampling frequency terms as a function of error $\varepsilon = (t_1 - t_a)$ and then into amplitude φ of the cutoff frequency of spectrum $Y(\omega)$ as a further function of pointing error $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_a$.

BIBLIOGRAFIA / BIBLIOGRAPHY

Von Regierungsrat Dr. Heinrich Stenzel "Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen", Verlag von Julius Springer, Berlin 1939

Athanasios Papoulis "The fourier integral and its applications" McGraw-Hill Book Company, Inc. 1962

G. Cariolaro "Teoria dei segnali", Parte I Segnali determinati, Coop. Libreria Editrice cleup