

## CAPITOLO 8

### GLI ALGORITMI DI FOURIER

Sono detti algoritmi di Fourier una serie di strumenti matematici che permettono di eseguire, sia per via puramente analitica, sia per via numerica, l'analisi dello spettro di frequenza che caratterizza i fenomeni dinamici. Questo capitolo è dedicato alla implementazione in Qbasic di alcuni tra i più utili ed importanti algoritmi di Fourier.

#### 8.1 I fenomeni periodici

Vanno sotto il nome di fenomeni periodici quegli eventi fisici che si ripetono ad intervalli di tempo regolari. La nota pura di un diapason, ad esempio, è un fenomeno periodico rappresentato dalla funzione  $y = \text{Sen}(2\pi f t)$  in cui  $f$  è la frequenza della vibrazione acustica e  $t$  è il tempo. In questo caso la natura del fenomeno è espressa completamente dalla funzione matematica che ne mette in evidenza, sia la natura sinusoidale, sia la frequenza del suono generato.

Nel caso invece del rombo di un motore a scoppio il suono è periodico a frequenza base  $f_0$  ma non è puro, esso è la composizione di un insieme di vibrazioni che non possono essere rappresentate da una espressione sintetica e trasparente come la precedente. Per molti fenomeni periodici sono state studiate funzioni in grado di rappresentarne le caratteristiche dinamiche in dipendenza del tempo; queste funzioni non forniscono però informazioni sul tipo di componenti ondulatorie che ne costituiscono la struttura.

La serie di Fourier è lo strumento per analizzare la struttura dei fenomeni periodici al fine di stabilire quali sono le componenti ondulatorie che li caratterizzano.

#### 8.2 La serie di Fourier per i fenomeni periodici

In questo paragrafo tratteremo della serie di Fourier al solo scopo di creare le premesse per le successive implementazioni degli algoritmi in Qbasic, l'argomento sarà perciò soltanto accennato senza alcuna dimostrazione che non potrebbe comunque essere svolta in un testo di questo tipo.

La serie di Fourier dà modo di trasformare una funzione periodica del tempo

$$y = f(2\pi f_0 t)$$

in cui  $f_0$  è la frequenza del periodo base, in una sommatoria di infinite componenti trigonometriche che ne evidenziano il contenuto a carattere frequenziale (spettro di frequenza) mediante oscillazioni multiple di  $f_0$ . La serie è esplicitata come segue:

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \text{Cos}(n 2\pi f_0 t) + B_n \text{Sen}(n 2\pi f_0 t)$$

dove  $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(2\pi f_0 t) d(2\pi f_0 t)$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(2\pi f_0 t) \text{Cos}(n 2\pi f_0 t) d(2\pi f_0 t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(2\pi f_0 t) \text{Sen}(n 2\pi f_0 t) d(2\pi f_0 t)$$

sono detti i coefficienti della serie.

Ciascun elemento della serie rappresenta in ampiezza e fase una delle frequenze dello spettro che compongono il fenomeno periodico.

L'ampiezza di ciascuna delle n frequenze (righe) che compongono lo spettro è data da:

$$C_n = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2}$$

$C_n$  è detto il modulo delle coppie  $A_n \text{Cos}(n 2\pi f_0 t) + B_n \text{Sen}(n 2\pi f_0 t)$  che costituiscono la serie di Fourier.

L'ampiezza del valor medio del fenomeno coincide con  $A_0$ .

Il coefficiente  $A_0$  viene calcolato una sola volta, i coefficienti  $A_n, B_n$  devono essere calcolati per tutti i valori di n corrispondenti al numero delle **frequenze significative** che compongono lo spettro.

Si è accennato alle frequenze significative dello spettro perché da un certo valore in poi la loro ampiezza, che scaturisce dal calcolo della serie, può diventare praticamente irrilevante.

Le formule possono essere ostiche a chi non ha dimestichezza in questo campo, ciò non deve preoccupare il lettore perché non sarà costretto ad impiegarle. Le formule sono mostrate soltanto per evidenziare un fatto fondamentale:

La serie di Fourier per i fenomeni periodici si ottiene da diverse elaborazioni della funzione data  $y = f(2\pi f_0 t)$ , mediante tre integrali per il calcolo di  $A_0, A_n, B_n$ .

Quindi per applicare la serie di Fourier deve essere espressa in forma analitica la funzione del fenomeno che si vuole analizzare; dato che sono disponibili elenchi completi di funzioni delle quali è già stata computata la serie in oggetto non è necessario applicare la procedura indicata se non per fare esercizio su questo argomento. A questo punto ci si chiederà perché aver discusso su questo tema se già tutto è stato fatto; la risposta è semplice, nel lavorare quotidiano si incontrano fenomeni periodici che non sono definiti mediante una funzione matematica, essi sono presentati ai nostri sensi, o con registrazioni grafiche, o con presentazioni oscilloscopiche, od infine con tracciati manuali a punti, in questi casi non si può procedere con sviluppi analitici per la ricerca delle componenti frequenziali, ma sulla base di quanto abbiamo mostrato si possono ottenere risultati soddisfacenti implementando opportunamente in Qbasic un adattamento della serie di Fourier.

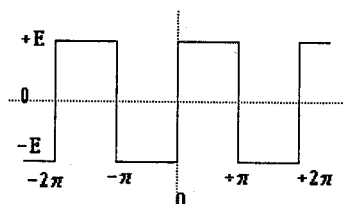
### 8.3 Un esempio della serie di Fourier per i fenomeni periodici

Senza addentrarci in sviluppi analitici complicati mostriamo un esempio della serie di Fourier applicata ad un fenomeno periodico definito completamente mediante una funzione matematica. L'esempio è preso da un elenco di serie di Fourier già calcolate, esso si riferisce ad una funzione del tempo quale l'onda rettangolare simmetrica riportata in figura 31.

La funzione matematica che definisce questo fenomeno periodico è data da:

$$f(2\pi f_0 t) = \begin{cases} -E; & \text{per } (2k-1)\pi < 2\pi f_0 t < (2k)\pi \\ +E; & \text{per } (2k)\pi < 2\pi f_0 t < (2k+1)\pi \end{cases}$$

per  $k = 0; +/- 1; +/- 2; +/- 3; .. ecc..$



**Figura 31**  
Onda rettangolare

Questo particolare algoritmo sintetizza il seguente ragionamento:

-la funzione ha ampiezza uguale a  $-E$  per tutti i valori di  $(2\pi f_0 t)$  compresi tra  $(2k-1)\pi$  e  $(2k)\pi$ .

-la funzione ha ampiezza uguale a  $+E$  per tutti i valori di  $(2\pi f_0 t)$  compresi tra  $(2k\pi)$  e  $(2k+1)\pi$

quanto sopra per  $k = 0; +/- 1; +/- 2; +/- 3; .. ecc..$

Della funzione in oggetto è stata calcolata analiticamente la serie di Fourier che è sotto rappresentata

$$f(\omega t) = (4E/\pi) [ (\text{Sen } \omega t) + (\text{Sen } 3\omega t)/3 + (\text{Sen } 5\omega t)/5 + (\text{Sen } 7\omega t)/7 + \dots ]$$

dove  $\omega = (2\pi f_0)$

" si impiega il simbolo  $\omega$  in vece di  $\omega$  dato che quest' ultimo non è disponibile in Qbasic"

La serie è già completamente sviluppata ed i singoli addendi rappresentano gli elementi frequenziali che compongono l'onda rettangolare; in questo caso si osserva:

-la serie è mancante del coefficiente  $A_0$ , ( $A_0=0$ ), ciò indica che il valor medio dell'onda è nullo

-la serie è mancante di tutti i termini  $A_n \text{Cos}(n 2\pi f_0 t)$  si ha cioè per tutti i valori di  $n$ : ( $A_n=0$ )

-la serie ha i coefficienti  $B_n$  per i soli valori dispari di  $n$ :  $B_1 = 4E/\pi$ ;  $B_3 = 4E/3\pi$ ;

$B_5 = 4E/5\pi$ ;  $B_7 = 4E/7\pi$

-il fenomeno periodico è formato da infinite frequenze multiple dispari della frequenza base  $f_0$ , il primo addendo è un'onda sinusoidale alla frequenza base  $f_0$ , il secondo addendo è un'onda sinusoidale alla frequenza  $3f_0$  con ampiezza pari ad  $1/3$  del primo, il terzo addendo è un'onda sinusoidale alla frequenza  $5f_0$  con ampiezza pari ad  $1/5$  del primo, ecc.

-in questo caso il valore  $C_n$  dell'ampiezza delle righe coincide con  $B_n$ , per  $n$  dispari.

L'onda originale è ricostruibile con la serie data sommando tra loro gli infiniti addendi che la compongono. In pratica ciò non è possibile, la somma può essere estesa, a titolo di esercitazione, ad un numero elevato, ma finito, di addendi che consentono in effetti la ricostruzione approssimata dell'onda. Osservando però che i termini della serie decrescono rapidamente in ampiezza si comprende che l'errore di ricostruzione può essere molto contenuto anche con un numero finito di essi. Per provare quanto sopra vediamo come implementare un programma per la ricostruzione dell'onda rettangolare sulla base della serie di Fourier e dei dati che da essa abbiamo dedotto.

Il programma è strutturato per il controllo dei coefficienti  $A_0$ ;  $A_n$ ;  $B_n$  ricavati dall'applicazione della serie di Fourier ad una qualsiasi funzione periodica; con esso si esegue la ricostruzione della funzione ed il suo tracciamento grafico, operando un procedimento inverso a quello che ha condotto alla determinazione dello spettro frequenziale.

Infatti per la determinazione dello spettro della funzione da analizzare la si scompone mediante  $n$  addendi della serie di Fourier, per la ricomposizione della funzione analizzata si esegue la sommatoria di  $n$  addendi della serie di Fourier.

Compiliamo e commentiamo il programma di ricostruzione che si avvale di funzioni di matrici volatili per accogliere i valori dei coefficienti  $A_n$ ;  $B_n$ .

Il programma impiega l'istruzione **DIM** per il dimensionamento di matrice in forma duplice; per dimensionare due matrici contemporaneamente si scrive: **DIM A(255),B(255)**.

**LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 ) ' ASSE Y 4 quadranti**

**LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 ) ' ASSE X 4 quadranti**

**DIM A(255) , B(255) ' impostazione delle dimensioni di due matrici volatili per accogliere An ; Bn**

**LOCATE 10, 66: INPUT "n" ; k ' richiesta del numero n degli addendi con i quali si vuole realizzare  
' la sommatoria della serie di Fourier , tutte le istruzioni LOCATE sono  
' dimensionate per far comparire le richieste all'esterno del reticolo**

**LOCATE 11, 66: INPUT "Ao" ; Ao ' richiesta di introduzione del valore di Ao**

**FOR n = 1 TO k ' comando automatico per richiesta n valori di matrice per le due matrici**

**LOCATE 14, 66: PRINT "A" ; n ' stampa il simbolo An per la successiva istruzione**

**LOCATE 15, 66: INPUT A( n ) ' stampa il simbolo ? per l'introduzione del valore di A(n)  
' relativo alla prima matrice**

**LOCATE 18, 66: PRINT "B" ; n ' stampa il simbolo Bn per la successiva istruzione**

**LOCATE 19, 66: INPUT B( n ) ' stampa il simbolo ? per l'introduzione del valore di B(n)  
' relativo alla seconda matrice**

**NEXT n ' rimanda all'istruzione FOR n = ... per completare le due matrici**

**FOR wt = 0 TO 6.28 STEP .00628 ' fissa la variabilità dell'argomento dei termini trigonometrici  
' per le componenti Coseno e Seno della sommatoria della serie  
' con incremento di wt tale da ottenere 1000 punti di calcolo**

**C = Ao ' pone il valore di C uguale ad Ao per sommarlo alla serie**

**FOR n = 1 TO k ' comando automatico per la lettura dei valori delle due matrici A(n) ; B(n)**

**C = C + A( n ) \* COS( n \* wt ) + B( n ) \* SIN( n \* wt ) ' sommatoria progressiva in base ai prodotti  
' An Cos(n wt) e Bn Sen(n wt) secondo la serie  
' di Fourier**

**NEXT n ' rimanda all'istruzione FOR n = ... per la scansione delle due matrici**

**PSET ( 230 + 36 \* wt , 160 - 160 \* C ) , 14 ' comanda il tracciamento del grafico della funzione  
' ricostruita**

**NEXT wt ' rimanda all'istruzione FOR wt = per il calcolo di un successivo punto della funzione ricostruita**

Ora non resta che provare il programma inserendo i dati emersi dall'analisi dell'onda rettangolare per una sommatoria della serie con un numero finito di termini, ad esempio con 20 addendi si ha:

per semplificare fissiamo il valore di  $E = \pi / 4$  in questo modo abbiamo

$$A_0 = 0$$

$A_n = 0$  per tutti i valori di  $n$

$B_n = 0$  per tutti gli  $n$  pari

$B_1 = 1; B_3 = .333; B_5 = .2; B_7 = .142; B_9 = .111; B_{11} = .09; B_{13} = .076; B_{15} = .066;$

$B_{17} = .058; B_{19} = .052$

F5

n ? 20

A0 ? 0

A1

? 0

B1

? 1

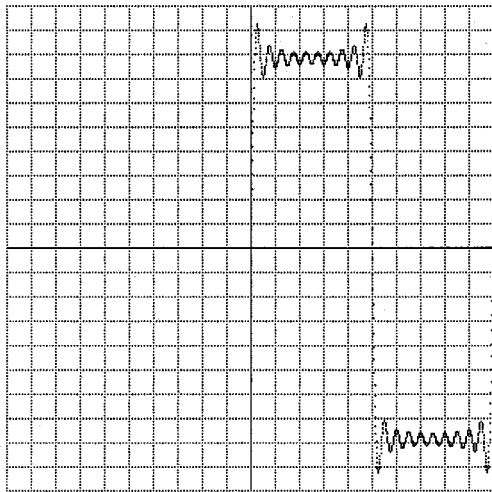
.....  
 si procede, dopo cancellazione dei dati precedenti con i tasti  
 freccia destra freccia sinistra, ad inserire:  
 .....

tutti 0 per A2; A3; ...A20

tutti 0 per B2; B4; ...B20

i valori sopra elencati per B3 ;B5 ;...B19

dopo la ventesima coppia si ha la presentazione grafica della ricostruzione di un periodo dell'onda rettangolare come mostra la figura 32.



**Figura 32**  
 Periodo d'onda rettangolare  
 ricostruito mediante serie  
 di Fourier

Dalla figura si osserva che i fronti dell'onda riprodotta sono notevolmente ripidi e che approssimano abbastanza bene l'onda originale, nei tratti in cui l'onda originale è piatta, intervalli compresi tra 0 e 3.14 e tra 3.14 e 6.28, l'approssimazione è lasciata all'ondulazione della componente a frequenza più elevata relativa alla 19ª armonica che è l'ultimo termine, diverso da 0, dei 20 addendi messi a calcolo.

Dal buon risultato ottenuto possiamo affermare, ed in questo caso è ovvio, che i coefficienti della serie calcolata sono corretti.

Le informazioni ricavate da questo esempio mostrano la potenzialità dell'algoritmo e ci forniscono gli elementi, utili nel prosieguo del capitolo, per il controllo dei programmi che andremo ad implementare.

#### 8.4 Approssimazione della serie di Fourier

Se il fenomeno periodico di cui vogliamo determinare le componenti frequenziali non è definito mediante una determinata legge matematica, ed è questo il caso più frequente in pratica, non è possibile svilupparlo mediante la serie di Fourier illustrata nel paragrafo 8.2. In questi casi si può procedere con diversi sistemi che presuppongono la disponibilità del tracciato del fenomeno, sotto forma di registrazione grafica od altro, dalla quale rilevare un certo numero di valori dell'ampiezza da utilizzare per i calcoli successivi.

Un sistema si avvale della serie di Fourier di cui al citato paragrafo, opportunamente modificata si da ottenere una espressione approssimata della stessa come sotto indicato:

$$y \cong A'_0 + \sum_{n=1}^{n=m} A'_n \text{Cos} (n 2 \pi f_0 t) + B'_n \text{Sen} (n 2 \pi f_0 t)$$

in cui i coefficienti  $A'_0$ ;  $A'_n$ ;  $B'_n$  non vengono calcolati con procedimenti analitici ma con elaborazioni numeriche al computer. I tre integrali che definiscono teoricamente i coefficienti vengono sostituiti dal computo di tre integrali per funzioni di tabella quali quelli sviluppati nel paragrafo 7.10.

#### 8.5 Implementazione della serie approssimata di Fourier

L'implementazione della serie approssimata di Fourier si basa sull'espressione del paragrafo precedente e sul calcolo dei coefficienti con la particolare modalità che abbiamo acquisito nel computo degli integrali di funzioni di tabella.

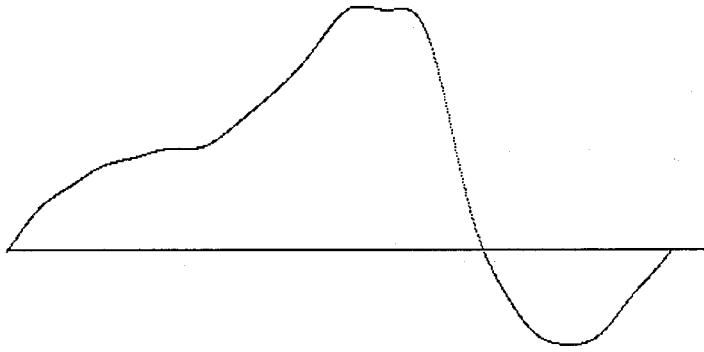
Per mostrare il procedimento di implementazione in Qbasic, che permette di determinare lo spettro di frequenza di un dato fenomeno periodico, è opportuno ricorrere ad un esempio pratico sulla base di un ipotetico rilievo oscillografico del fenomeno stesso:

sia dato pertanto il grafico di figura 33.

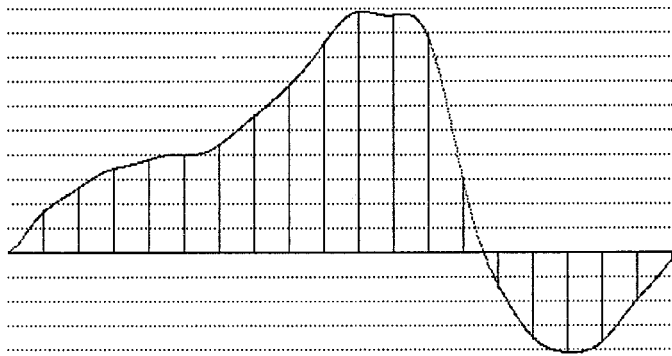
Il tracciato mostra un periodo di un'onda non simmetrica della quale ci proponiamo di determinare lo spettro di frequenza.

Si tratta ora di ricavare dal grafico dato una funzione di tabella che ci dia modo di procedere al calcolo dei coefficienti  $A'_0$ ;  $A'_n$ ;  $B'_n$  e delle ampiezze  $C'_n$  della serie di Fourier, mediante integrazione a mezzo Qbasic.

Per iniziare la procedura è necessario dividere il periodo dell'onda, pari a  $2 \pi$ , in un numero discreto di intervalli uguali così come è mostrato, ad esempio, in figura 34:



**Figura 33**  
Onda periodica da analizzare  
nel campo della frequenza



**Figura 34**  
Onda periodica campionata per  
analisi nel campo della frequenza

La pratica ha mostrato che 19 intervalli sono sufficienti per ottenere discreti risultati se la forma d'onda del grafico è distribuita con una certa regolarità nell'ambito del periodo; è chiaro però che maggiore è il numero degli intervalli e più elevata può essere la precisione nella determinazione dello spettro di frequenza del fenomeno in esame.

Dopo aver diviso un periodo in 19 intervalli andiamo a misurare, per ciascuno dei 20 punti, che valore assume il grafico nella scala proposta e formiamo la funzione di tabella con i **campioni** rilevati:

x	a(x)
1	0
2	.16
3	.27
4	.34
5	.38
6	.40
7	.44
8	.56
9	.68
10	.86
11	.98
12	.98
13	.87
14	.30
15	-.14
16	-.34
17	-.42
18	-.36
19	-.20
20	-.04

Ricavata la funzione di tabella si devono impostare i 3 coefficienti della serie di Fourier in base alla formula di integrazione esposta al paragrafo 7.10 che qui riportiamo:

$$I = (.5 a(1) + a(2) + a(3) + \dots + a(M-1) + .5 a(M)) (f-i) / (M-1)$$

in cui i simboli si devono adattare in base al nostro esempio:

- al posto di I si scriveranno, in tre espressioni distinte, A<sub>0</sub>; B<sub>n</sub> A<sub>n</sub>
- al posto di ( f - i ) si scriverà l'intervallo dell'onda in esame pari a 2 π
- M resta il numero massimo dei campioni della funzione di tabella, nel nostro esempio M = 20
- a(x) resta il singolo elemento della funzione di tabella, da a(1) ad a(20)

in base alle definizioni dei coefficienti date nel paragrafo 8.2 si mostrano, a scopo didattico ed in forma estesa, le espressioni che dovranno essere implementate nel programma di calcolo automatico:

$$A_0 = (1/2 \pi) [ .5 a(1) + a(2) + a(3) + \dots + a(19) + .5 a(20) ] ( 2 \pi ) / 19$$

$$A_n = (1/\pi) [ .5 a(1) \text{Cos}(nwt_1) + a(2) \text{Cos}(nwt_2) + \dots + .5 a(20) \text{Cos}(nwt_{20}) ] ( 2 \pi / 19 )$$

$$B_n = (1/\pi) [ .5 a(1) \text{Sen}(nwt_1) + a(2) \text{Sen}(nwt_2) + \dots + .5 a(20) \text{Sen}(nwt_{20}) ] ( 2 \pi / 19 )$$

$$C_n = ( A_n^2 + B_n^2 )^{1/2}$$



in cui il valore di n rappresenta la ennesima frequenza dello spettro dopo la quale si ritiene che le ampiezze delle componenti spettrali siano irrilevanti e pertanto da non calcolare; nel nostro esempio fissiamo n=10.

Il calcolo dei coefficienti non richiede precisioni molto elevate, ai fini pratici sono sufficienti tre decimali; pertanto, onde evitare difficoltà di lettura dei dati presentati si adotta una particolare istruzione che limita il numero delle cifre visualizzate. La prima istruzione di questo tipo utilizzata nel programma è così strutturata:

```
PRINT "A'o"; USING "####.###" ; H
```

essa prevede la parte intera a 4 cifre (####), e la parte decimale a 3 cifre (###).

Il programma utilizza inoltre una nuova versione dell'istruzione LOCATE detta a riga variabile, istruzione utile per scrivere i dati di uscita su tre colonne ed utilizzare al meglio lo schermo del P.C. l'istruzione è impiegata tre volte nella forma:

```
LOCATE ( u ), 20 :
LOCATE ( u ), 40 :
LOCATE ( u ), 60 :
```

dove u, variabile da 1 a p, posiziona i dati l'uno dopo l'altro su righe successive, rispettivamente per le colonne 20; 40; 60.

Vediamo quindi compilato e commentato il programma che esegue il computo automatico, sia dei coefficienti  $A'_0$ ;  $A'_n$ ;  $B'_n$ , in base alle formule di integrazione sopra esposte, sia delle ampiezze  $C'_n$  delle componenti frequenziali o **righe dello spettro** del fenomeno periodico tracciato in figura 33. Essendo il programma a carattere generale prevede l'introduzione del valore di M (nel nostro esempio  $M = 20$ ).

```
CLS ' pulisce lo schermo ad inizio operazioni
DIM a(255) ' dimensiona il massimo indice della matrice
INPUT "n" ; n ' richiesta ingresso numero n righe da calcolare
INPUT "M" ; M ' richiesta ingresso numero M elementi della matrice
FOR x = 1 TO M ' comanda impostazione matrice da x=1 a x=M
PRINT "a" ; x ' visualizza a(x) per indicare l'elemento matrice da inserire
INPUT a(x) ' visualizza il carattere ? accanto al quale digitare il valore di a(x) specificato nell'istruzione precedente
NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR x= per completare la matrice
CLS ' pulisce lo schermo dai dati digitati
FOR u = 1 TO n ' comanda il calcolo per coppie da A'1 ; B'1 a A'n ; B'n
FOR x = 1 TO M ' comanda il richiamo degli elementi di matrice da a(1) ad a(M)
nwt = ( 6.283185 / ( M - 1 ) ) * u * ( x - 1 ) ' calcolo dell'argomento per le funzioni trigonometriche utilizzate nelle
' due istruzioni seguenti (si osservi che la x è diminuita di 1 perché il calcolo delle funzioni &
```

' trigonometriche deve iniziare con argomento a valore zero)

**IF x = 1 THEN k = .5 ELSE IF x = M THEN k = .5 ELSE k = 1**

' impone k= .5 per il primo e l'ultimo prodotto in base alla regola dei trapezi

**B = k \* a(x) \* SIN( nwt ) \* ( 2 / ( M - 1 ) )**

' prodotto secondo il seno per il calcolo dei  
' termini da mettere in sommatoria per la computazione di B'n

**C = k \* a(x) \* COS( nwt ) \* ( 2 / ( M - 1 ) )**

' prodotto secondo il coseno per il calcolo dei  
' termini da mettere in sommatoria per la computazione di A'n

**T = T + C** ' sommatoria per il calcolo di A'n

**Q = Q + B** ' sommatoria per il calcolo di B'n

**D = k \* a(x) \* ( 1 / ( M - 1 ) )** ' prodotto per calcolo termini da mettere in sommatoria per computazione di A'o

**H = ( D + H )** ' sommatoria per il calcolo di A'o

**NEXT x** ' rimanda all'istruzione FOR x=... per il richiamo dei successivi elementi di matrice

**Cn = SQR ( T ^ 2 + Q ^ 2 )** ' calcolo dell'ampiezza della riga Cn

**IF u = 1 THEN PRINT "A'o"; USING "####.###"; H**

' presenta il dato calcolato di A'o a 4 interi e 3 decimali

**LOCATE ( u ),20 : PRINT "A'"; u ; USING "####.###"; T**

' presenta il dato calcolato di A'n a 4 interi e 3 decimali su riga (u) colonna 20

**LOCATE ( u ),40 : PRINT "B'"; u ; USING "####.###"; Q**

' presenta il dato calcolato di B'n a 4 interi e 3 decimali su riga (u) colonna 40

**LOCATE ( u ),60 : PRINT "C'"; u ; USING "####.###"; Cn**

' presenta il dato calcolato di C'n a 4 interi e 3 decimali su riga (u) colonna 60

**Q = 0** ' si azzerano le memorie Q ; T ; H ; Cn prima di ripetere i calcoli per il successivo valore di u

**T = 0**

**H = 0**

**Cn = 0**

**NEXT u** ' rimanda all'istruzione FOR u= ... per il calcolo di una nuova coppia di A'n ; B'n.

se premiamo F5 il programma chiede:

il numero delle righe che si vogliono calcolare n ? 10

il numero degli elementi che formano la matrice M ? 20

i valori di

a1

? 0

a2

? .16

a3

? .27

a4

? .34

valori inseriti ..... secondo la funzione di tabella

a20

? -.04

introdotto l'ultimo dato  $a_{20} = -0.04$  il programma presenta i dati calcolati

$A_0$ 0.302	A'1 -0.497	B'1 0.223	C'1 0.545
	A'2 0.179	B'2 0.240	C'2 0.299
	A'3 0.019	B'3 -0.068	C'3 0.070
	A'4 -0.033	B'4 0.010	C'4 0.035
	A'5 0.019	B'5 0.018	C'5 0.026
	A'6 0.006	B'6 -0.016	C'6 0.017
	A'7 -0.020	B'7 0.004	C'7 0.021
	A'8 0.012	B'8 0.005	C'8 0.013
	A'9 -0.006	B'9 -0.006	C'9 0.008
	A'10 -0.006	B'10 0.006	C'10 0.008

I risultati presentati mostrano le 10 coppie dei coefficienti  $A'_n$ ;  $B'_n$ , l'ampiezza delle righe  $C'_n$  ad essi corrispondenti ed il valore di  $A_0$ .

Si osserva che le righe dello spettro di frequenza decrescono rapidamente e che la 6<sup>a</sup> armonica ha una ampiezza di circa 1/30 rispetto alla riga a frequenza base; ciò conferma, in questo caso, che i 10 termini che abbiamo posto a calcolo sono più che sufficienti per rappresentare lo spettro del fenomeno periodico analizzato. Il valor medio dell'onda  $A_0 = 0.302$  è positivo e sensibilmente diverso da zero, ciò è conforme con il profilo del fenomeno che è sviluppato in prevalenza nel campo dei valori positivi.

Quando un'analisi di questo tipo viene espletata, data la indubbia complessità dell'impostazione e del calcolo, resta qualche ragionevole dubbio sulla possibilità di aver commesso qualche errore tale da inficiare i risultati finali; è possibile un controllo dell'elaborato applicando il programma per la ricostruzione del fenomeno periodico, dati i coefficienti  $A_0$ ;  $A'_n$ ;  $B'_n$ , così come mostrato nel paragrafo 8.3, la verifica dei dati che abbiamo ottenuto in questo esercizio sarà oggetto del paragrafo 8.7.

### 8.6 Aspetto fisico dell'analisi frequenziale

L'analisi frequenziale sviluppata nell'esercizio del paragrafo 8.5 è servita per calcolare le componenti armoniche del fenomeno periodico tracciato in figura 33; i risultati che abbiamo ottenuto, pur espressi in termini di righe dello spettro di frequenza, non contengono alcuna indicazione relativa ai valori delle frequenze che compongono l'onda oggetto dell'analisi. In effetti la serie di Fourier è applicata alla forma dell'onda e non al suo valore di frequenza base  $f_0$  che può essere qualsiasi.

E' bene chiarire questo importante aspetto fisico della cosa con due esempi numerici molto semplici: supponiamo che l'onda analizzata abbia un periodo della durata di 1 millesimo di secondo ( $T = 0.001$  Sec.), in questo caso il valore di  $f_0$  è  $f_0 = 1/T = 1/0.001 = 1000$  Hz.

Dato che il calcolo ha mostrato che sono presenti tutti e dieci i valori di  $C'_n$  (infatti nessun valore di  $C'_n$  è uguale a zero) ciò significa che anche tutte le componenti armoniche pari e dispari sono presenti; se la frequenza base (**frequenza fondamentale**) è di 1000 Hz le 10 componenti frequenziali calcolate avranno i seguenti valori:

riga	ampiezza	frequenza Hz
C'1	0.545	1000
C'2	0.299	2000
C'3	0.070	3000
C'4	0.035	4000

C'5	0.026	5000
C'6	0.017	6000
C'7	0.021	7000
C'8	0.013	8000
C'9	0.008	9000
C'10	0.008	10000

Se invece la durata del periodo del fenomeno è ad esempio 20 millesimi di secondo,  $T = 20 / 1000$  Sec.  $f_0 = 1 / (20 / 1000) = 50$  Hz e lo spettro sarà:

riga	ampiezza	frequenza Hz
C'1	0.545	50
C'2	0.299	100
C'3	0.070	150
C'4	0.035	200
C'5	0.026	250
C'6	0.017	300
C'7	0.021	350
C'8	0.013	400
C'9	0.008	450
C'10	0.008	500

Perciò, ferma restante la forma del fenomeno periodico, l'analisi armonica condotta su di esso può esprimere indifferentemente qualsiasi spettro di frequenza in dipendenza della durata del periodo.

Una parola deve essere spesa anche per quanto riguarda le ampiezze delle righe dello spettro; i calcoli di  $C_n$  conducono ad una serie di valori che devono essere interpretati correttamente; se ci riferiamo sempre alla tabella sopra riportata dobbiamo tenere presente che i valori di ampiezza che vi compaiono sono da riferirsi alla riga a valore più elevato, nel nostro caso al valore 0.545, perciò le ampiezze di tutte le altre componenti possono essere rapportate alla prima; la tabella può cioè essere normalizzata dividendo tutti i valori per 0.545 in modo da mettere in evidenza i rapporti tra le diverse ampiezze. Così facendo si ottiene la nuova tabella:

riga	ampiezza normalizzata	frequenza Hz
C'1	1	50
C'2	0.548	100
C'3	0.128	150
C'4	0.064	200
C'5	0.047	250
C'6	0.031	300
C'7	0.038	350
C'8	0.023	400
C'9	0.014	450
C'10	0.014	500

Nell'esempio che abbiamo fatto la riga di ampiezza maggiore è risultata essere quella relativa alla frequenza fondamentale, ciò non è una regola, la riga di ampiezza maggiore può risultare una qualsiasi dello spettro in dipendenza della forma dell'onda.

Con i valori di  $C_n$  normalizzati si possono tracciare gli spettri a righe impiegando il programma che mostriamo e commentiamo:

```

SCREEN 9          ' Il programma inizia con la stesura di 11 istruzioni per
FOR x = 0 TO 460 STEP 23  ' la formazione di un sistema di assi cartesiani con
FOR y = 0 TO 160 STEP 2   ' reticolo rettangolare adattato alla presentazione
PSET (x, y), 7           ' dei valori normalizzati di Cn (con valore massimo
NEXT y                ' di Cn = 1); il reticolo è del tipo rettangolare ad un
NEXT x                ' solo quadrante, è diviso in 20 intervalli sull'asse x
FOR y = 0 TO 160 STEP 16 ' in modo da consentire la presentazione di 20 righe
FOR x = 0 TO 460 STEP 3   ' è diviso in 10 intervalli sull'asse y in modo da
PSET (x, y), 7           ' facilitare i raffronti tra le ampiezze delle righe
NEXT x
NEXT y
LINE (0, 0)-(0, 160)     ' ASSE Y ad 1 quadrante
LINE (0, 160)-(460, 160) ' ASSE X ad 1 quadrante
DIM a(20) ' dimensiona matrice volatile per accogliere al massimo 20 valori di Cn
LOCATE 1, 66: INPUT "n=" ; n ' richiesta del numero n delle righe da presentare
FOR x = 1 TO n ' impostazione richiesta automatica matrice valori Cn
LOCATE 2, 66: PRINT "C"; x ' presentazione simbolo Cn per l'istruzione seguente
LOCATE 3, 66: INPUT a(x) ' presentazione del simbolo ? per richiesta valore Cn
NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR x= ... per l'introduzione dei successivi valori di Cn
FOR x = 1 TO n ' comando per l'esplorazione della matrice volatile
Cn = a(x) ' estrazione elemento di matrice scandito dall'istruzione precedente
LINE (23 * x, 160) - (23 * x, 160 - 160 * Cn), 14 ' traccia le n righe a distanza di un intervallo asse x
NEXT x ' rimanda alla seconda istruzione FOR x= per proseguire l'esplorazione della matrice

```

Il programma si prova con i valori normalizzati calcolati nell'ultima tabella; premendo F5 si ha la comparsa di un piccolo reticolo rettangolare sulla sinistra in alto dello schermo e compare sulla destra la richiesta del numero delle righe e la richiesta dei valori di  $C_n$ :

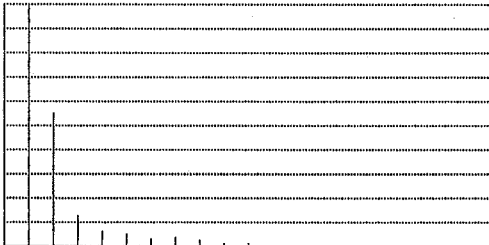
```

n= ? 10
C 1
? 1
.....

```

e di seguito cancellando  
con le frecce si inseriscono  
gli altri 9 valori di Cn

dopo l'introduzione dell'ultimo valore si ha la presentazione del reticolo con le 10 righe dello spettro in colore giallo come mostra la figura 35.



**Figura 35**  
Righe dello spettro del fenomeno  
periodico di figura 33

### 8.7 Metodo per il controllo dell'analisi frequenziale

Il metodo per il controllo dell'analisi frequenziale, condotta mediante l'applicazione della serie di Fourier ad un fenomeno periodico, è già stato sperimentato nel paragrafo 8.3 per la verifica di dati computati analiticamente; in questo caso applicheremo il programma di calcolo per il controllo dei dati elaborati nell'esercizio precedente, il lavoro servirà come base generale per la verifica dei coefficienti di una serie di Fourier derivata da un'onda rappresentata da un tracciato.

L'applicazione del programma che ora riproponiamo in forma lievemente modificata, conduce ad un tracciato che, se il metodo non fosse approssimato, dovrebbe essere esattamente sovrapponibile alla curva di figura 33, dato però che tutte le nostre procedure sono necessariamente approssimate il tracciato sarà tanto più vicino all'onda analizzata quanti più campioni sono stati presi in fase di formazione della funzione di tabella.

L'elenco dei dati da verificare, elaborato nel paragrafo 8.5, è costituito dal termine  $A_0$  e da 10 coefficienti; da  $A'1$  ad  $A'10$ , da  $B'1$  a  $B'10$ , come da tabulato sotto riportato:

$A_0$ 0.302	$A'1$ -0.497	$B'1$ 0.223
	$A'2$ 0.179	$B'2$ 0.240
	$A'3$ 0.019	$B'3$ -0.068
	$A'4$ -0.033	$B'4$ 0.010
	$A'5$ 0.019	$B'5$ 0.018
	$A'6$ 0.006	$B'6$ -0.016
	$A'7$ -0.020	$B'7$ 0.004
	$A'8$ 0.012	$B'8$ 0.005
	$A'9$ -0.006	$B'9$ -0.006
	$A'10$ -0.006	$B'10$ 0.006

questi dati devono essere inseriti nel programma dopo aver scelto, dato il tipo di grafico da presentare, un sistema di assi cartesiani a soli due quadranti. Inoltre, dato che l'asse delle ascisse dell'onda originale è stato diviso in 19 intervalli, è opportuno, per una più facile comparazione delle curve, l'onda originale e l'onda ricostruita, che il fenomeno venga presentato su 19 intervalli del reticolo; per fare ciò si deve calcolare il valore di K1 dell'istruzione PSET come segue:

$$K1 = (460 / 20) \cdot 19 / 6.28 = 69.58$$

```

LINE ( 0 , 160 ) - ( 460 , 160 ) ' comanda il tracciamento dell'asse delle ascisse (asse X)
                                ' per coordinate a 2 quadranti (colore = bianco luminoso)

LINE ( 0 , 0 ) - ( 0 , 320 ) ' comanda il tracciamento dell'asse delle ordinate (asse Y)
                                ' per coordinate a 2 quadranti (colore = bianco luminoso)

DIM A(255) , B(255) ' impostazione delle dimensioni di due matrici volatili per accogliere
                    ' i coefficienti A'n ; B'n

LOCATE 10, 66: INPUT "n" ; k ' richiesta del numero n degli addendi con i quali si vuole realizzare
                    ' la sommatoria della serie di Fourier , il valore coincide con il numero
                    ' delle coppie di coefficienti disponibili, tutte le istruzioni LOCATE sono
                    ' dimensionate per far comparire le richieste all'esterno del reticolo

LOCATE 11, 66: INPUT "A'o" ; Ao ' richiesta di introduzione del valore di A'o

FOR n = 1 TO k ' comando automatico per richiesta n valori di matrice per le due matrici

LOCATE 14, 66: PRINT "A" ; n ' stampa il simbolo A'n per la successiva istruzione

LOCATE 15, 66: INPUT A(n) ' stampa il simbolo ? per l'introduzione del valore di A'(n)
                    ' relativo alla prima matrice

LOCATE 18, 66: PRINT "B" ; n ' stampa il simbolo B'n per la successiva istruzione

LOCATE 19, 66: INPUT B(n) ' stampa il simbolo ? per l'introduzione del valore di B'(n)
                    ' relativo alla seconda matrice

NEXT n ' rimanda all'istruzione FOR n = ... per completare le due matrici

FOR wt = 0 TO 6.28 STEP .00628 ' fissa la variabilità dell'argomento dei termini trigonometrici
                    ' per le componenti Coseno e Seno della sommatoria della serie
                    ' con incremento di wt tale da ottenere 1000 punti di calcolo

C = Ao ' pone il valore di C uguale ad A'o per sommarlo alla serie

FOR n = 1 TO k ' comando automatico per la lettura dei valori delle due matrici A'(n) ; B'(n)

C = C + A(n) * COS(n * wt) + B(n) * SIN(n * wt) ' sommatoria progressiva in base ai prodotti
                    ' A'n Cos(n wt) e B'n Sen(n wt) secondo lo sviluppo
                    ' della serie di Fourier

NEXT n ' rimanda all'istruzione FOR n = ... per la scansione delle due matrici

PSET ( 69.58 * wt , 160 - 160 * C ) , 14 ' comanda il tracciamento del grafico della funzione ricostruita

NEXT wt ' rimanda all'istruzione FOR wt = per il calcolo di un successivo punto della funzione ricostruita

```

Compilato il programma non resta che inserire:

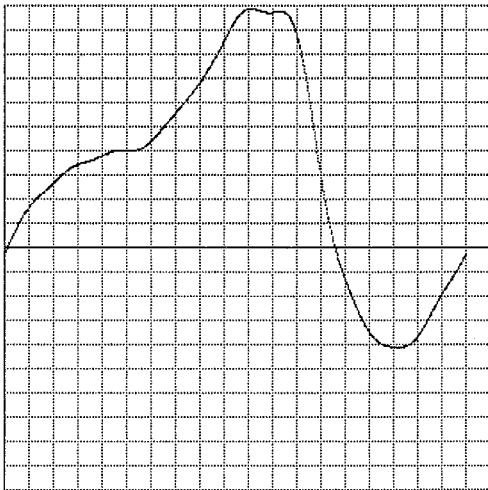
- il numero delle coppie dei coefficienti ( $n = 10$ )
- il valore di  $A_0$
- i valori delle coppie  $A_n$ ;  $B_n$  elencati nella tabella:

F5

```
n? 10
A0 ? .302
A1
? - 0.497
B1
? 0.223
.....
```

si procede, dopo cancellazione dei dati precedenti con i tasti freccia destra freccia sinistra, ad inserire tutte le restanti 9 coppie di coefficienti .

Dopo la decima coppia si ha la presentazione grafica della ricostruzione del periodo dell'onda come mostrato in figura 36.

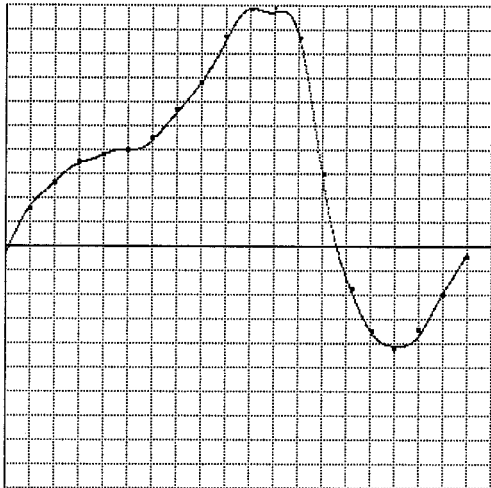


**Figura 36**  
Andamento ricostruito del fenomeno periodico di figura 33

Riportando sul grafico di figura 36 i punti del grafico dell'onda analizzata si osserva che la ricostruzione operata è molto accurata, ciò assicura che i valori dei coefficienti della serie di Fourier che sono stati calcolati in fase di analisi frequenziale sono corretti. Il confronto tra i due grafici è mostrato in figura 37.

Il risultato ottenuto mostra la potenzialità del programma per il controllo dell'analisi frequenziale. E' utile che il lettore si eserciti con questa procedura di calcolo impiegando nuovi tabulati in  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  ricavati, applicando il metodo della serie approssimata di Fourier sviluppato nel paragrafo 8.5, da forme d'onda disegnate a tavolino.





**Figura 37**  
Confronto tra onda originale  
e onda ricostruita

### 8.8 L'integrale o trasformata di Fourier

Per la determinazione dello spettro frequenziale di fenomeni non periodici che si presentano sotto forma di singoli impulsi molto distanziati temporalmente tra loro è disponibile un algoritmo detto **trasformata o integrale di Fourier**. Gli impulsi analizzabili con questo algoritmo possono essere caratterizzati, sia dalla presenza al loro interno di porzioni di onde periodiche, sia da nessuna modificazione interna. La differenza fondamentale tra la serie di Fourier e l'integrale ora menzionato risiede nel fatto che la prima esprime l'onda periodica  $f(\omega t)$  mediante la sommatoria di un numero infinito di componenti frequenziali, ciascuna individuabile da un numero intero  $n$ , mentre il secondo individua lo spettro di un fenomeno impulsivo mediante una funzione continua dipendente dalla frequenza.

La serie di Fourier si estende, nel campo delle frequenze, in componenti che possono comprendere come valore minimo la frequenza fondamentale dell'onda per poi crescere soltanto, indefinitamente, nel campo delle frequenze più elevate della fondamentale.

L'integrale di Fourier si estende con continuità, nel campo delle frequenze, per valori sia superiori che inferiori alla frequenza eventualmente contenuta nell'impulso stesso.

In questo paragrafo tratteremo dell'integrale di Fourier al solo scopo di chiarire alcuni elementi necessari alla particolare implementazione di un importante algoritmo in Qbasic, l'argomento sarà perciò soltanto accennato senza alcuna dimostrazione analitica.

La legge matematica che esprime lo spettro di un fenomeno impulsivo è data da:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

in cui

$G(\omega)$  rappresenta la funzione della frequenza risultato dell'integrale di Fourier

$F(t)$  rappresenta la funzione del tempo che definisce il fenomeno impulsivo da analizzare

$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$  è l'operatore trigonometrico complesso

L'algoritmo dell'integrale di Fourier non invita certo il lettore, non allenato a questo tipo di sviluppi, a cimentarsi per il calcolo dello spettro di un impulso; anche in questo caso però, come per la serie di Fourier, sono disponibili nutriti elenchi di integrali già sviluppati che, se necessario, possono semplificare il lavoro teorico. A noi non interessa procedere in questo senso, una volta mostrata la forma risolutiva per le ragioni che vedremo, sarà sufficiente riportare un esempio già risolto che ci servirà a titolo di riscontro nel controllo di ciò che andremo ad implementare in Qbasic. Consideriamo pertanto un fenomeno impulsivo di tipo cosinusoidale quale quello mostrato in figura 38



**Figura 38**  
Impulso cosinusoidale

La funzione del tempo che lo definisce è:

$$F(t) = \begin{cases} E \cos \omega_0 t & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{per } t > T \end{cases}$$

Il significato di questa funzione è molto chiaro; dato un fenomeno impulsivo ad andamento cosinusoidale di frequenza  $f_0$ , ampiezza  $E$ , durata  $T$ , che si ipotizza piazzato con il fronte di salita al tempo  $t = 0$  si ha:

$F(t)$  assume il valore  $E \cos \omega_0 t$  per un tempo  $t$  compreso tra  $0$  e  $T$

$F(t)$  assume il valore  $0$  per tutto il tempo superiore alla durata  $T$  del fenomeno dove  $\omega_0 = 2\pi f_0$  (pulsazione del fenomeno ondulatorio)

Applicando l'integrale di Fourier a questa funzione del tempo abbiamo la corrispondente funzione della frequenza che esprime l'ampiezza (modulo di  $G(\omega)$ ) dello spettro dell'impulso:

$$|G(\omega)| \cong ET/2 \left| \frac{\sin(\omega - \omega_0) T/2}{(\omega - \omega_0) T/2} \right|$$

in cui  $\omega = 2\pi f$  è la variabile indipendente.

L'espressione rappresenta il valore assoluto di una funzione del tipo  $\sin x / x$  che già abbiamo trattato nel paragrafo 2.21. Come si vede il modulo di  $G(\omega)$ , spettro del fenomeno impulsivo, è una funzione della variabile indipendente  $\omega$  e come tale rappresentabile da una curva continua.

L'espressione mostra che quando la variabile indipendente  $w$  assume il valore della pulsazione  $w_0$  sia il numeratore che il denominatore diventano zero dando luogo ad una forma indeterminata che, così come già visto nel paragrafo sopra citato, calcolata al limite vale 1; ciò evidenzia che il livello massimo dell'ampiezza dello spettro di frequenza dell'impulso coincide con la frequenza  $f_0$  relativa all'onda contenuta nell'impulso.

E' interessante ora tracciare il grafico dello spettro che abbiamo esaminato prendendo ad esempio un impulso con le seguenti caratteristiche:

- durata dell'impulso cosinusoidale  $T = 0.002$  Sec.
- frequenza dell'ondulazione contenuta nell'impulso  $f_0 = 10000$  Hz
- pulsazione angolare dell'ondulazione  $w_0 = 2 \pi f_0$
- ampiezza dell'impulso  $E = 1000$
- coefficiente  $E T / 2 = 1$

da analizzare, a scopo dimostrativo, in un campo frequenziale che inizia da 2000 Hz sotto la frequenza dell'ondulazione e finisce a 2000 Hz sopra tale frequenza; corrispondente ad un intervallo compreso tra 8000 Hz e 12000 Hz.

Con i valori assunti possiamo iniziare scrivendo  $|G(w)|$  in Qbasic:

$$|G(w)| = y =$$

$$= \text{ABS} \left( \frac{\text{SIN} \left( (6.28 * f - 6.28 * 10000) * 0.002/2 \right)}{\left( (6.28 * f - 6.28 * 10000) * 0.002/2 \right)} \right)$$

e quindi compilare il programma per il tracciamento del modulo di  $G(w)$ :

-si calcola il valore k1 per l'istruzione PSET  $k1 = 460 / (12000 - 8000) = .115$

-si compone la variabile x di PSET nella forma  $(f - 8000) * .115$

-si fissa la presentazione su assi cartesiani ad I quadrante

-l'asse delle ascisse (asse della variabile indipendente  $f$ ) è suddiviso in 20 intervalli da 200 Hz ciascuno

-l'asse delle ordinate (asse della variabile dipendente  $|G(w)|$ ) è suddiviso in 20 intervalli da .05

**LINE (0, 320) - (460, 320)** ' assi cartesiani ad I quadrante indicati per una funzione che si sviluppa  
' soltanto nel campo delle ascisse e delle ordinate positive

**LINE (0, 0) - (0, 320)** ' (colore = bianco luminoso)

**LOCATE 23, 66 : PRINT "Y- Div. = .05"** ' produce la scritta Y-Div. = .05 nell'angolo  
' basso a destra dello schermo

**LOCATE 22, 66 : PRINT "X- Div. = 200 Hz"** ' produce la scritta X-Div. =200Hz nell'angolo  
' basso a destra dello schermo

**FOR f= 8000 TO 12000 STEP 1.1**

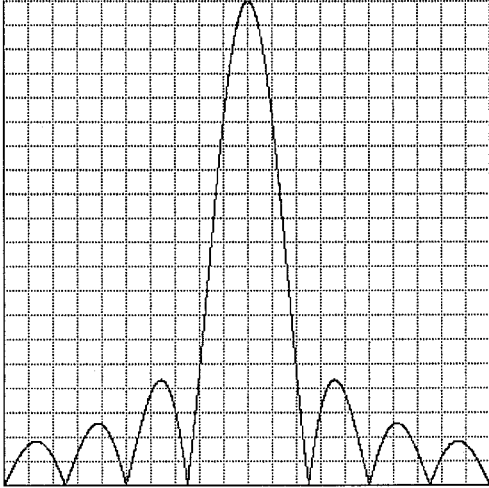
- ' campo di variabilità della frequenza di  $w = (2 \pi f)$  con incremento
- ' di 1.1 Hz (incremento non intero per evitare la forma indeterminata)
- ' (pari circa a 3600 punti di calcolo)

**y = ABS (( SIN (( 6.28 \* f - 6.28 \* 10000 ) \* 0.002/2 )) / (( 6.28 \* f - 6.28 \* 10000 ) \* 0.002/2 ))**  
' funzione  $|G(w)|$  da computare

**PSET (( f - 8000 ) \* .115 , 320 - 320 \* y),14** ' comanda il tracciamento del grafico in giallo

**NEXT f** ' comanda il programma al ritorno automatico all'istruzione FOR f= .. ecc.

sullo schermo si ha la presentazione del reticolo e della curva caratteristica dello spettro dell'impulso cosinusoidale così come riportato in figura 39 dalla quale si osserva:



**Figura 39**  
Spettro dell'impulso  
cosinusoidale

- La curva mostra la continuità dello spettro del fenomeno impulsivo, contrariamente alle discontinuità degli spettri a righe frutto dell'analisi armonica dei fenomeni periodici.
- La curva è tracciata tra l'origine degli assi, coincidente con la frequenza 8000 Hz, e la fine dell'asse delle ascisse coincidente con la frequenza 12000 Hz.
- La curva ha il suo valore massimo al centro dell'asse delle ascisse in coincidenza della frequenza di 10000 Hz, tale frequenza caratterizza il fenomeno periodico contenuto nell'impulso.
- I primi zeri della  $|G(\omega)|$  sono collocati rispettivamente alle frequenze di 9500 Hz e 10500 Hz, ad una distanza frequenziale pari a  $10500 - 9500 = 1000$  Hz. Questo intervallo è calcolabile in base alla durata dell'impulso secondo l'espressione  $2/T = 2/0.002 = 1000$  Hz.
- Lo spettro si estende senza soluzione di continuità anche per frequenze esterne al tracciato.

### 8.8.1 La trasformata di Fourier e la collocazione degli spettri

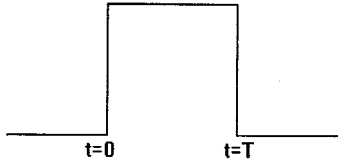
Per comprendere meglio come possono essere collocati, nel campo delle frequenze, gli spettri dei fenomeni impulsivi è di aiuto lo sviluppo dell'integrale di Fourier relativo ad un semplice impulso a caratteristica rettangolare come quello mostrato in figura 40.

Questo impulso è definito da una legge matematica simile a quella descritta in precedenza per l'impulso a contenuto oscillante:

$$F(t) = \begin{cases} E & \text{per } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{per } t > T \end{cases}$$

Il significato di questa funzione è semplice; dato un fenomeno impulsivo semplice di ampiezza E e durata T, che si ipotizza piazzato con il fronte di salita al tempo t = 0 si ha:

F(t) assume il valore E per un tempo t compreso tra 0 e T  
 F(t) assume il valore 0 per tutto il tempo superiore alla durata T del fenomeno



**Figura 40**  
 Impulso rettangolare

Applicando l'integrale di Fourier a questa funzione del tempo abbiamo la corrispondente funzione della frequenza che esprime il modulo di G(w) dello spettro dell'impulso; il risultato dell'integrale ci è fornito dagli appositi elenchi ed è:

$$|G(w)| = ET \left| \frac{\text{Sen}(wT/2)}{(wT/2)} \right|$$

L'espressione dello spettro è, come per l'esercizio precedente, del tipo Sen x/x ma senza il valore di w<sub>0</sub> dato che in questo caso all'interno dell'impulso non sono presenti fenomeni oscillatori; in essa compare soltanto la variabile indipendente w = 2 π f.

Questa sostanziale differenza porta la funzione ad avere il suo valore massimo in corrispondenza della frequenza zero e pertanto una collocazione dello spettro dell'impulso completamente diversa dal primo esempio.

Per tracciare il grafico dello spettro dell'impulso rettangolare consideriamo ad esempio un impulso con le seguenti caratteristiche:

- durata dell'impulso T = 0.01 Sec.
- ampiezza dell'impulso E = 100
- coefficiente ET = 1

da analizzare in un campo frequenziale che deve iniziare necessariamente da 0 Hz e finire ad esempio a 1000 Hz.

Con i valori assunti possiamo iniziare scrivendo |G(w)| in Qbasic:

$$|G(w)| = y = \text{ABS}(\text{SIN}(6.28 * f * .01 / 2) / (6.28 * f * .01 / 2))$$

e quindi compilare il programma per il tracciamento del modulo di G(w):

- si calcola il valore k1 per l'istruzione PSET k1 = 460 / 1000 = .46
- si compone la variabile x di PSET nella forma f \* .46
- si fissa la presentazione su assi cartesiani ad I quadrante
- l'asse delle ascisse (asse della variabile indipendente f) è suddiviso in 20 intervalli da 50 Hz
- l'asse delle ordinate (asse della variabile dipendente |G(w)|) è suddiviso in 20 intervalli da .05

```
LINE ( 0 , 320 ) - ( 460 , 320 ) ' assi cartesiani ad I quadrante indicati per una funzione che si sviluppa
' soltanto nel campo delle ascisse e delle ordinate positive
```

```
LINE ( 0 , 0 ) - ( 0 , 320 ) ' (colore = bianco luminoso)
```

```
LOCATE 23 , 66 : PRINT "Y- Div. =.05" ' produce la scritta Y-Div. = .05 nell'angolo
' basso a destra dello schermo
```

```
LOCATE 22 , 66 : PRINT "X- Div. = 50 Hz" ' produce la scritta X-Div.=50Hz nell'angolo
' basso a destra dello schermo
```

```
FOR f = 0.001 TO 1000 STEP .1
' campo di variabilità della frequenza di  $w = (2 \pi f)$  con incremento
' di 1Hz ed inizio per  $f=0.001$  onde evitare la forma indeterminata
' ( pari circa a 10000 punti di calcolo )
```

```
y = ABS ( SIN ( 6.28 * f * .01 / 2 ) / ( 6.28 * f * .01 / 2 ) )
' funzione  $|G(w)|$  da computare
```

```
PSET ( f * .46 , 320 - 320 * y ),14 ' comanda il tracciamento del grafico in giallo
```

```
NEXT f ' comanda il programma al ritorno automatico all'istruzione FOR f= .. ecc.
```

F5

sullo schermo si ha la presentazione del reticolo e della curva caratteristica dello spettro dell'impulso rettangolare così come riportato in figura 41.

-La curva mostra la continuità dello spettro del fenomeno impulsivo, contrariamente alle discontinuità degli spettri a righe frutto dell'analisi armonica dei fenomeni periodici.

-La curva è tracciata tra l'origine degli assi, coincidente con la frequenza 0 Hz, e la fine dell'asse delle ascisse coincidente con la frequenza 1000 Hz.

-La curva ha il suo valore massimo all'inizio dell'asse delle ascisse in coincidenza della frequenza zero.

-Il primo zero della  $|G(w)|$  è collocato alla frequenza di 100 Hz, questo valore è calcolabile in base al reciproco della durata dell'impulso:  $1/T = 1/.01 = 100$  Hz .

-Lo spettro si estende senza soluzione di continuità anche per i valori di frequenza più elevata non compresi nel tracciato.

-Le variazioni di ampiezza dello spettro, per frequenze superiori alla frequenza del primo zero, decrescono indefinitamente .

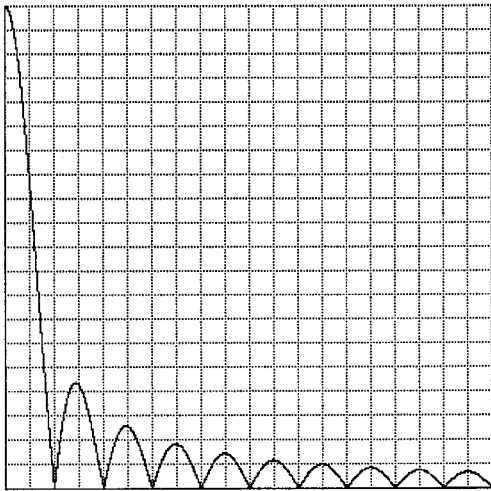
Con lo sviluppo di questo programma abbiamo completato due esercizi tipici relativi alla trasformata di Fourier; a complemento del lavoro svolto evidenziamo alcune caratteristiche significative relative ai moduli di  $G(w)$ :

-le funzioni che esprimono  $|G(w)|$  sono del tipo  $|Sen x/x|$ , sia per l'impulso cosinusoidale che per l'impulso rettangolare

-per entrambi i moduli restano fissi i rapporti tra le ampiezze dello spettro fuori del massimo e l'ampiezza del massimo stesso

-è possibile cambiare, se necessario, i rapporti di cui al punto precedente mediante modifiche calibrate dei profili degli impulsi seguendo un processo particolare che prende il nome di finestra di Tukey .

Il metodo è indicato da Harris nel lavoro USE OF WINDOWS FOR HARMONIC ANALYSIS.



**Figura 41**  
Spettro dell'impulso  
rettangolare di figura 40

### 8.9 Metodo di approssimazione per l'integrale di Fourier - la DFT -

Abbiamo constatato, nel paragrafo precedente, che l'applicazione dell'integrale di Fourier richiede la conoscenza analitica della funzione impulsiva della quale si voglia determinare lo spettro di frequenza; quando la funzione del tempo che descrive il fenomeno impulsivo è nota si può tentare il calcolo della trasformata di Fourier, sia con l'ausilio dei già citati elenchi, sia mediante sviluppi analitici molto complicati. Quando poi il fenomeno impulsivo non è definito matematicamente, ma se ne conosce soltanto il profilo, il problema della determinazione dello spettro di frequenza non è affrontabile con i metodi ordinari dell'analisi matematica. In questi casi gioca un ruolo fondamentale un metodo di approssimazione per l'integrale di Fourier, implementabile in Qbasic, che dà modo di risolvere con buoni risultati il problema menzionato.

Il metodo in questione è definito con l'acronimo **DFT** composto dalle iniziali della terminologia inglese **D**iscrete **F**ourier **T**ransform (Trasformata di Fourier per punti discreti).

La DFT consente il calcolo approssimato dello spettro di frequenza di un fenomeno impulsivo quando di esso si conoscano un certo numero di valori d'ampiezza (campioni) rilevati nell'ambito della durata dell'impulso stesso.

Per i nostri scopi l'algoritmo della DFT può essere espresso mediante la sommatoria:

$$G(qf) = \sum_{p=1}^k S(p) e^{-j2\pi qp/N}$$

in cui:

$G(qf)$  rappresenta lo spettro complesso dell'impulso nei  $q$  punti calcolati

$N$  rappresenta il rapporto  $N = 2F_{max} / DF$  dove  $F_{max}$  è la massima frequenza dello

spettro che si vuole analizzare e  $DF$  è l'intervallo di frequenza assegnato tra due valori contigui di  $G(qf)$ .

$k$  è un intero che rappresenta il numero di campioni da rilevare dall'impulso in base alla relazione  $k = 2 T F_{max}$  dove  $T$  è la durata temporale dell'impulso e  $F_{max}$  è la massima frequenza dello spettro che si vuole analizzare

$p$  è il numero di posizione del generico campione variabile da  $p = 1$  a  $p = k$

$S(p)$  rappresenta il generico valore di ampiezza (campione temporale) dei  $k$  misurati sull'impulso da analizzare

$e^{-j2\pi qp/N}$  è l'operatore trigonometrico complesso

$q$  rappresenta il numero discreto dei punti calcolati dello spettro complesso di frequenza normalmente fissato dal rapporto  $q \leq F_{max} / DF$

Il calcolo dei  $q$  termini complessi della DFT si svolge come segue:

per  $p = 1$  si esegue il prodotto tra  $S(1)$  e l'operatore trigonometrico in cui  $q = 0$ ;  $p = 1$ , si ripete l'operazione per  $p = 2$ ;  $q = 0, \dots$ , si ripete infine l'ultimo prodotto per  $p = k$ ;  $q = 0$ , si sommano tra loro i  $k$  prodotti e si ottiene il primo valore di  $G(qf)$  per  $q = 0$ .

Il calcolo viene replicato come il precedente ma per  $q = 1$ , in questo caso la sommatoria dei  $k$  prodotti fornisce il secondo valore di  $G(qf)$  per  $q = 1$ .

Si procede in modo analogo per  $q = 2$ ;  $q = 3$ ; ... ottenendo rispettivamente il terzo, quarto, ecc. valore complesso di  $G(qf)$ .

La sommatoria della DFT che abbiamo mostrato è in forma complessa e come tale non può essere implementata in Qbasic; per il calcolo dell'ampiezza dello spettro di un fenomeno impulsivo, mediante programma esecutivo della DFT in Qbasic, è necessaria la conoscenza del modulo di  $G(qf)$  che esponiamo senza dimostrazione:

$$|G(qf)| = \left[ \left( \sum_{p=1}^k S(p) \cos(2\pi qp/N) \right)^2 + \left( \sum_{p=1}^k S(p) \sin(2\pi qp/N) \right)^2 \right]^{1/2}$$

in cui

$|G(qf)|$  rappresenta il modulo dello spettro complesso dell'impulso nei  $q$  punti calcolati  
 $N$  rappresenta il rapporto  $N = 2F_{max} / DF$  dove  $F_{max}$  è la massima frequenza dello spettro che si vuole analizzare e  $DF$  è l'intervallo di frequenza assegnato tra due valori contigui di  $|G(qf)|$ .

$k$  è un intero che rappresenta il numero di campioni da rilevare dall'impulso in base alla relazione  $k = 2 T F_{max}$  dove  $T$  è la durata temporale dell'impulso e  $F_{max}$  è la massima frequenza dello spettro che si vuole analizzare. Più elevato è il valore di  $k$  più preciso è il calcolo dello spettro.

$p$  è il numero di posizione del generico campione variabile da  $p = 1$  ad  $p = k$

$S(p)$  rappresenta il generico valore di ampiezza (campione) dei  $k$  misurati sull'impulso da analizzare

$q$  rappresenta il numero discreto dei punti calcolati dello spettro complesso di frequenza normalmente fissato dal rapporto  $q \leq F_{max} / DF$

Si deve chiarire subito, ad evitare equivoci, che i  $q$  punti calcolati di  $|G(qf)|$  **non sono righe** dello spettro ma rappresentano i valori dello spettro continuo che sono stati computati; tra due



qualsiasi di questi valori contigui si possono calcolare, sempre che il numero dei campioni dell'impulso lo permetta, altri valori dello spettro di frequenza che caratterizzano il fenomeno impulsivo.

### 8.9.1 Implementazione della DFT in Qbasic

Per l'implementazione dell'espressione di  $|G(qf)|$  presentiamo un programma appositamente studiato e commentato che sviluppa il calcolo dell'ampiezza dei  $q$  valori calcolati dello spettro di un fenomeno impulsivo. Il programma si avvale di una particolare routine di calcolo per la normalizzazione dei valori del modulo di  $G(qf)$ ; con questo metodo si ha la possibilità di tracciare il grafico normalizzato con un massimo di punti pari a  $q = 255$ . La presentazione grafica prevede l'impiego di un reticolo quadrato ad un solo quadrante, diviso sulle ascisse e sulle ordinate in 20 intervalli, sul quale non sono tracciati gli assi cartesiani per consentire la visione dei punti che possono cadere sugli estremi.

Al fine di rendere più chiara la stesura del programma, questa è stata suddivisa in 4 sezioni:

- Grafica per tracciamento del solo reticolo
- Procedimento per il calcolo della DFT (con richiesta dati)
- Procedimento per la normalizzazione della  $|G(qf)|$  (in tre passi)
- Presentazione grafica della  $|G(qf)|$  normalizzata

' GRAFICA - per tracciare il solo reticolo-

SCREEN 9

FOR x = 0 TO 460 STEP 23

FOR y = 0 TO 320 STEP 2 ' VERTICALE

PSET (x, y), 7

NEXT y

NEXT x

FOR y = 0 TO 320 STEP 16

FOR x = 0 TO 460 STEP 3 ' ORIZZONTALE

PSET (x, y), 7

NEXT x

NEXT y

LOCATE 9, 66 : INPUT "Fmax=" ; rr ' richiesta valore di fondo scala per calibrazione ascisse

ff = rr / 20 ' calcolo Div. ascisse

LOCATE 23, 64 : PRINT "y-Div.=. 05"

LOCATE 22, 64 : PRINT "x-Div.= " ; ff ; "Hz"

' PROCEDIMENTO PER IL CALCOLO DELLA DFT con le richieste dati posizionate a destra del reticolo

LOCATE 10, 66 : INPUT "N=" ; N ' entra il valore N=2Fmax / DF

LOCATE 11, 66 : INPUT "q=" ; q ' entra il numero dei punti di  $|G(qf)|$  da calcolare  $q = Fmax / DF$  &

```

LOCATE 12, 66 : INPUT "k=" ; k 'entra il numero dei campioni  $k = 2 T F_{max}$  che sono rilevati
' all'interno dell'impulso

DIM S(k), u(q), v(q) 'dimensionamento matrici volatili S(k);u(q);v(q)

FOR p = 1 TO k 'istruzione per inserimento automatico campioni S(p) da 1 a k

LOCATE 13, 66 : PRINT "S" ; p 'istruzione che visualizza il simbolo del campione da inserire S(p)

LOCATE 14, 66 : INPUT S(p) 'istruzione che visualizza il simbolo ? per l'ingresso di S(p)

NEXT p

FOR i = 0 TO q 'istruzione per il calcolo automatico dei q valori di |G(qf)|

FOR p = 1 TO k 'istruzione per l'esecuzione delle due sommatorie in seno e coseno

z = 6.283185 'valore che ricorre negli argomenti dei termini in seno e coseno

C = S(p) * COS ( p * i * z / N ) 'calcolo dei termini in coseno

D = S(p) * SIN ( p * i * z / N ) 'calcolo dei termini in seno

T = T + C 'sommatoria di funzione dei termini in coseno

S = S + D 'sommatoria di funzione dei termini in seno

NEXT p 'rimanda alla seconda istruzione FOR p=1... per la sommatoria dei termini trigonometrici

u(i) = SQR( T ^ 2 + S ^ 2 ) 'calcolo modulo di G(qf) e formazione matrice u(i)

T = 0 'pulizia delle memorie
S = 0
v = 0

NEXT i 'rimanda all'istruzione For=i .. per il calcolo dei q valori di |G(qf)|

' PROCEDIMENTO INDIRIZZATO ALLA NORMALIZZAZIONE DI |G(qf)|

' PRIMO PASSO - creazione di una matrice uguale a u(i)

FOR i = 0 TO q 'formazione della matrice v(i) per la ricerca del massimo di |G(qf)|

v(i) = u(i) 'la matrice v(i) è una copia della matrice u(i)

NEXT i 'rimanda all'istruzione FOR i = .. per il completamento copia matrice

' SECONDO PASSO - isolamento del valore massimo della matrice v(i)=u(i)

FOR i = 0 TO q

FOR r = 0 TO q

IF v(i) < v(r) THEN v(i) = 0 'l'isolamento del valore massimo della matrice v(i) ; si ottiene
' uguagliando a 0 tutti i termini

NEXT r 'della matrice che sono inferiori agli altri

NEXT i &

```

```

' TERZO PASSO -ricerca del massimo della matrice v(i)=u(i)
FOR i = 0 TO q ' procedimento finale per la
                ' ricerca del massimo di v(i)
IF v(i) > 0 THEN v = v(i) ' max = v
NEXT i
' NORMALIZZAZIONE DELLA |G(qf)|
' la normalizzazione di |G(qf)| si ottiene con il rapporto u(i) / v
FOR i = 0 TO q ' calcolo del rapporto u(i)/v
h = u(i) / v ' |G(qf)| normalizzata
' PRESENTAZIONE GRAFICA della |G(qf)| normalizzata
PSET ((460 / q) * i , 320 - 320 * h), 14 ' presentazione grafica dei q punti di |G(qf)| normalizzata
PSET ((460 / q) * i + 1 , 320 - 320 * h), 14 ' mediante gruppi di 5 punti per meglio evidenziarne
PSET ((460 / q) * i - 1 , 320 - 320 * h), 14 ' le tracce mediante crocette
PSET ((460 / q) * i , 320 - 320 * h + 1), 14
PSET ((460 / q) * i , 320 - 320 * h - 1), 14
NEXT i ' rimanda all'ultima istruzione FOR i=.. per il tracciamento dei q punti

```

Per prendere confidenza con il nuovo metodo di calcolo è indispensabile svolgere alcuni esempi numerici sulla base degli elementi in nostro possesso; si suggerisce inizialmente la scelta dei valori di DF e  $F_{max}$  secondo le seguenti limitazioni:  $DF < 1 / (3 T)$ ,  $F_{max} > 5 / T$ .  
Prendiamo in esame un impulso rettangolare le cui caratteristiche siano:

-durata dell'impulso  $T = 0.01$  Sec.  
-ampiezza dell'impulso  $E = 1$

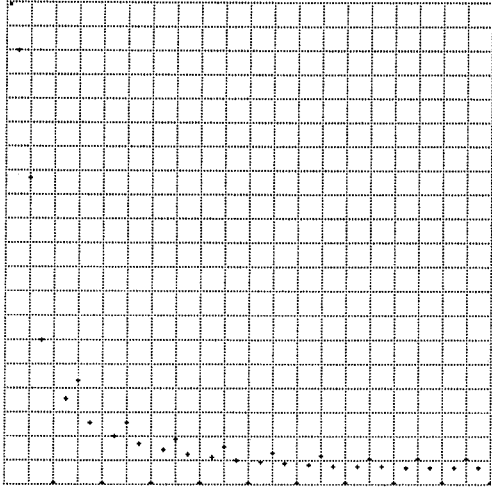
Proponiamoci la determinazione dello spettro dell'impulso, tramite DFT, da frequenza 0 a  $F_{max} = 1000$  Hz a passi di frequenza pari a  $DF = 25$  Hz; si calcolano inizialmente i valori di:  
 $k = 2 T F_{max} = 2 \cdot 0.01 \text{ Sec.} \cdot 1000 \text{ Hz} = 20$   
 $N = 2 F_{max} / DF = 2 \cdot 1000 / 25 = 80$   
 $q = \leq F_{max} / DF = 1000 / 25 = 40$   
 $S(p)$  da  $p = 1$  a  $p = k = 20$ , dato che l'impulso è rettangolare tutti e 20 campioni sono uguali ad  $E = 1$ .  
 Questi dati possono essere inseriti nel programma per il calcolo di  $|G(qf)|$ :

```

F5
Fmax= ? 1000
N= ? 80
q= ? 40
k= ? 20
S 1
? 1
..... di seguito fino a S20 cancellando di volta in volta i campioni digitati e già inseriti.

```

Dopo l'introduzione dell'ultimo campione  $S(20)$  si ha la presentazione del reticolo nel quale compaiono, a punti gialli, i 40 valori calcolati per  $|G(qf)|$  normalizzata così come mostrato in figura 42, si ha un dato ogni  $1000 / 40 = 25$  Hz.



**Figura 42**  
 $|G(qf)|$  normalizzata

Per avere un'idea della bontà dell'algoritmo DFT è utile confrontare i risultati ottenuti con questa procedura con dati elaborati analiticamente mediante la trasformata di Fourier; il confronto è reso possibile ricavando dalla figura 42 un tabulato di 20 valori della  $|G(qf)|$  normalizzata e riportando, a fianco di questi, i valori determinati analiticamente, per lo stesso tipo di impulso, nell'esercizio del paragrafo 8.8.

Scegliendo i primi 20 valori consecutivi di  $q$  ciascuno di essi sarà separato dagli altri di  $1000/40 = 25$  Hz e la tabella sarà così configurata:

q	f ( Hz )	calcolo con	calcolo
		DFT	analitico
		$ G(qf) $	$ G(qf) $
0	0	1	1
1	25	.9	.9
2	50	.64	.65
3	75	.30	.30
4	100	0	0
5	125	.18	.17
6	150	.21	.21
7	175	.13	.12
8	200	0	0
9	225	.1	.1
10	250	.13	.12

11	275	.08	.07
12	300	0	0
13	325	.07	.07
14	350	.09	.09
15	375	.06	.06
16	400	0	0
17	425	.06	.05
18	450	.08	.07
19	475	.05	.05

Dalla tabella si osserva una ottima corrispondenza tra la  $|G(qf)|$  computata con DFT e la  $|G(qf)|$  computata per via puramente analitica, questo riscontro evidenzia la bontà della DFT che pertanto può essere applicata con certezza di validi risultati per lo studio dei fenomeni impulsivi non definiti matematicamente.

### 8.9.2 Esempio applicativo della DFT

Un secondo esempio ci aiuterà ad usare il programma per la DFT nella generalità dei casi; supponiamo di dover eseguire l'analisi di un fenomeno impulsivo quale quello tracciato in figura 43, fenomeno della durata temporale  $T = .0125$  Sec.

Si voglia determinare lo spettro dell'impulso, tramite DFT, da frequenza 0 a  $F_{max} = 1000$  Hz a passi di frequenza pari a  $DF = 25$  Hz.

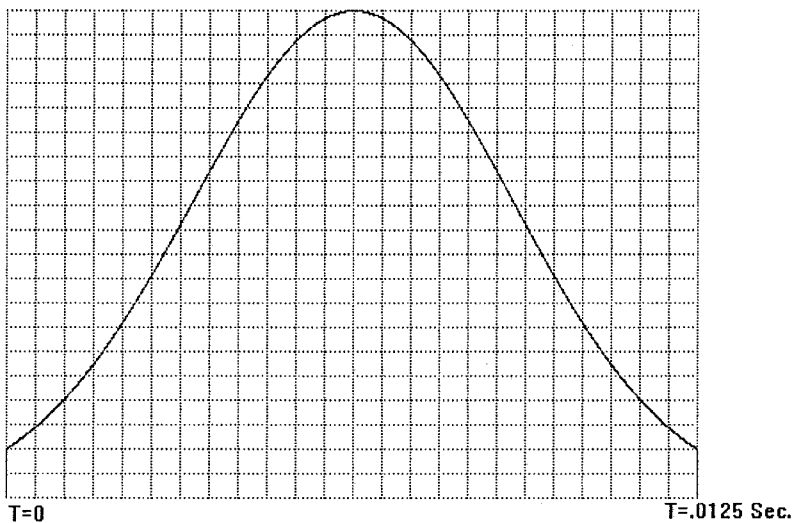
Si devono inizialmente calcolare i valori di:

$$k = 2 T F_{max} = 2 \cdot .0125 \text{ Sec.} \cdot 1000 \text{ Hz} = 25$$

$$N = 2 F_{max} / DF = 2 \cdot 1000 / 25 = 80$$

$$q = \leq F_{max} / DF = 1000 / 25 = 40$$

$S(p)$  da  $p = 1$  a  $p = k = 25$  secondo la tabella seguente, ricavata dalla figura 43, dopo aver suddiviso l'asse delle ascisse in 24 intervalli uguali e misurate le 25 ascisse,  $S(p)$ , sul disegno:



**Figura 43**  
Impulso generico da analizzare

p	S(p)
1	.10
2	.14
3	.20
4	.27
5	.36
6	.46
7	.56
8	.67
9	.77
10	.86
11	.93
12	.98
13	1.00
14	.98
15	.93
16	.86
17	.77
18	.67
19	.56
20	.46
21	.36
22	.27
23	.20
24	.14
25	.10

questi dati possono essere inseriti nel programma per il calcolo di  $|G(qf)|$ :

F5

Fmax= ? 1000

N= ? 80

q= ? 40

k= ? 25

S 1

? .10

..... di seguito fino a S25 cancellando

..... di volta in volta i campioni digitati

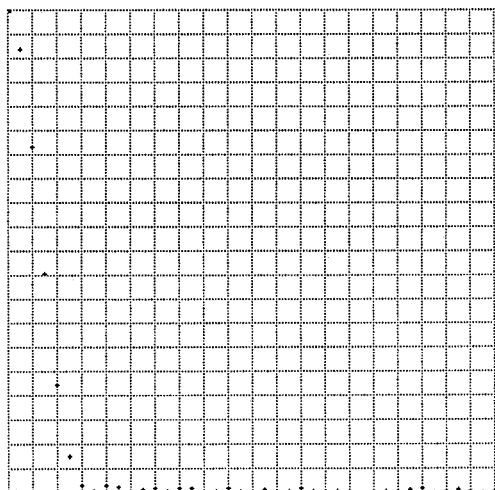
..... e già inseriti.

.....

Dopo l'introduzione dell'ultimo campione S(25) si ha la presentazione del reticolo nel quale compaiono, a punti gialli, i 40 valori calcolati per  $|G(qf)|$  normalizzata così come mostrato in figura 44; si ha un dato ogni  $1000 / 40 = 25$  Hz.

Lo spettro dell'impulso è visualizzato dalla frequenza 0 alla frequenza massima di 1000 Hz.

Anche in questo caso, come nell'esempio mostrato nel paragrafo 8.8.1, l'ampiezza massima del modulo di  $G(w)$  si ha alla frequenza zero; ciò è dovuto alle caratteristiche dell'impulso analizzato che non contiene fenomeni ondulatori al suo interno.



**Figura 44**  
 Spettro del fenomeno impulsivo  
 di figura 43 calcolato con DFT

Lo spettro del fenomeno impulsivo che abbiamo ottenuto, diversamente dal precedente esempio, non è verificabile analiticamente dato che non si conosce la legge matematica che governa l'impulso di figura 43; una volta però che il programma è stato testato si può essere ragionevolmente fiduciosi che il risultato ottenuto è significativo.