Sviluppi matematici per il calcolo delle funzioni di correlazione tra segnali elettrici

1) La funzione di correlazione di segnali sinusoidali.

L'algoritmo di calcolo della funzione di correlazione tra segnali sinusoidali, del tipo A Cos (ωt), si ottiene partendo dall'integrale generale di correlazione impostato nel dominio del tempo:

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} (1/T) \int_0^T f(t) \quad f(t+\tau)\, dt$$

che, per segnali sinusoidali a frequenza f_o, posto $\omega = 2\pi f_o$, diventa:

$$= \lim_{T\to\infty} (1/T) \int_0^T A \cos \omega t \quad A \cos \omega(t+\tau)\, dt =$$

moltiplicando e dividendo per 2 :

$$= \lim_{T\to\infty} (A^2/2T) \int_0^T 2 \cos \omega t \quad \cos \omega(t+\tau)\, dt =$$

essendo 2 Cos x Cos y = Cos (x-y) + Cos (x-y) :

$$= \lim_{T\to\infty} (A^2/2T) \int_0^T \left\{ \cos[(\omega t) - \omega(t+\tau)] + \cos[(\omega t) + \omega(t+\tau)] \right\} dt =$$

scindendo l'integrale di una somma nella somma di due integrali :

$$= \lim_{T\to\infty} (A^2/2T) \int_0^T \cos[(\omega t) - \omega(t+\tau)]\, dt + \lim_{T\to\infty} (A^2/2T) \int_0^T \cos[(\omega t) + \omega(t+\tau)]\, dt =$$

sviluppando otteniamo:

$$= \lim_{T\to\infty} (A^2/2T) \int_0^T \mathrm{Cos}\,(\omega\tau)\;dt + \lim_{T\to\infty} (A^2/2T) \int_0^T \mathrm{Cos}\,[\,(2\omega t) + \omega(\tau)\,]\;dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} (A^2/2T)\;\mathrm{Cos}\,(\omega\tau) \int_0^T dt \;+\; \lim_{T\to\infty} (A^2/2T) \int_0^T \mathrm{Cos}\,[\,(2\omega t) + \omega(\tau)\,]\;dt =$$

calcolando separatamente i due integrali :

$$= \lim_{T\to\infty} (A^2/2T)\;\mathrm{Cos}\,(\omega\tau)\;T \;+\; \lim_{T\to\infty} (A^2/2T)\;\Big|(1/2\omega)\;\mathrm{Sen}\,[\,(2\omega T) + \omega(\tau)\,] \quad =$$

infine, al limite per $T = \infty$, si ha:

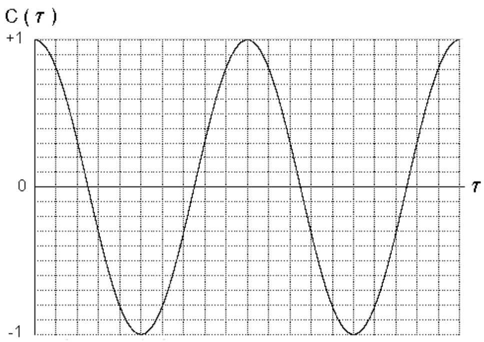
$$= (A^2/2)\;\mathrm{Cos}\,(\omega\tau) \quad + \quad 0 \quad = \quad \mathbf{(A^2/2)\;Cos\,(\omega\tau)}$$

Generalmente, per la valutazione del profilo delle funzioni di correlazione, si impiega la funzione normalizzata ottenuta dalla precedente dividendo per $(A^2/2)$; la nuova funzione è:

$$\mathbf{C(\tau) = Cos\,(\omega\tau)}$$

Una delle caratteristiche più salienti di questa nuova funzione è che la sua ampiezza è sempre contenuta tra **+**1 è -1.

L'andamento della funzione calcolata è sotto riportato per:
f = 1000 Hz $\quad \tau_{\text{fondo scala}}$ = 2 mSec.



2) **La funzione di correlazione di segnali definiti in bande rettangolari di frequenze.**

L'algoritmo di calcolo della funzione di correlazione tra segnali definiti in bande rettangolari di frequenze , f_1- f_2, si ottiene partendo dalla funzione di correlazione normalizzata ottenuta al paragrafo 1):

$$C(\tau) = \text{Cos}\ (\omega\tau) = \text{Cos}\ (2\ \pi\ f\ \tau)$$

questa viene integrata nel dominio della frequenza come segue :

$$C(\tau) = \int_{f1}^{f2} \text{Cos}\ (2\ \pi\ f\ \tau)\ df =$$

risolvendo l'integrale si ha :

$$= \Big|\ [\ \text{Sen}\ (2\ \pi\ f\ \tau\ )\ ] / (2\ \pi\ \tau\ )\ \Big|_{f_1}^{f_2} =$$

sostituendo gli estremi d'integrazione otteniamo:

$$= [\ \text{Sen}\ (2\ \pi\ f_2\ \tau\ )\ ] / (2\ \pi\ \tau\ ) - [\ \text{Sen}\ (2\ \pi\ f_1\ \tau\ )\ ] / (2\ \pi\ \tau\ ) =$$

$$= \Big[1/(2\ \pi\ \tau\ )\Big]\ \Big\{\ [\ \text{Sen}\ (2\ \pi\ f_2\ \tau\ )\ ] - [\ \text{Sen}\ (2\ \pi\ f_1\ \tau\ )\ ]\ \Big\} =$$

essendo sen x – sen y =
= sen (x-y)/2 cos (x+y)/2
possiamo scrivere :

$$= \Big[1/(2\ \pi\ \tau\ )\Big]\ \text{Sen}\ \pi\ \tau\ (f_2 - f_1)\ \ \text{Cos}\ \pi\ \tau\ (f_2 + f_1) =$$

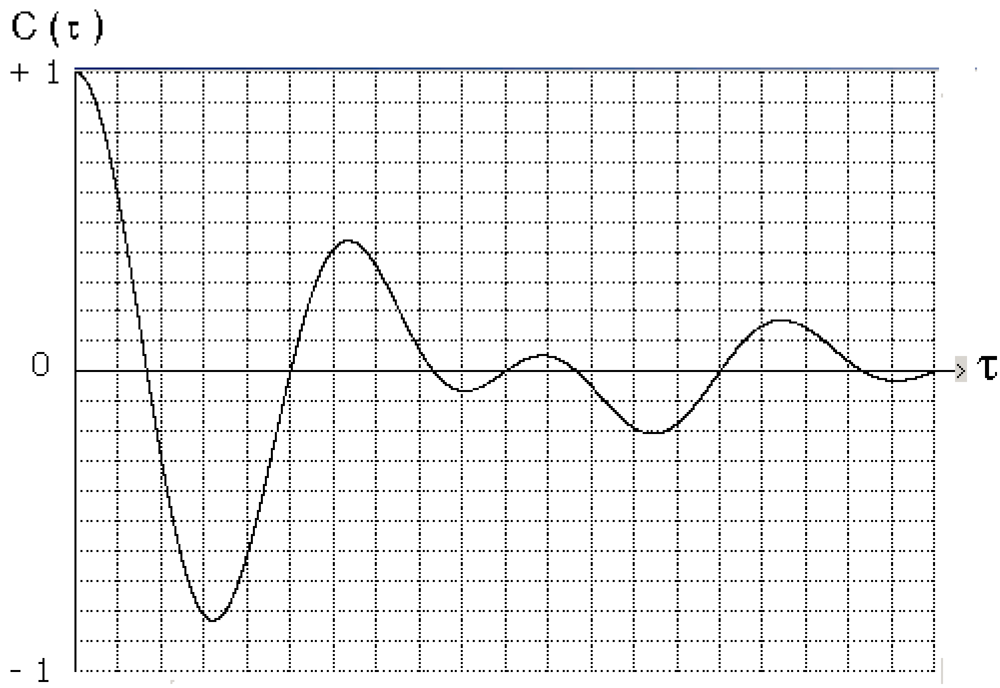
per ottenere la forma classica Sen x/x moltiplichiamo e dividiamo l'espressione per ($f_2 - f_1$); si ha infine:

$$= (f_2 - f_1)/2\ \ \frac{\text{Sen}\ \pi\ \tau\ (f_2 - f_1)}{\pi\ \tau\ (f_2 - f_1)}\ \ \text{Cos}\ \pi\ \tau\ (f_2 + f_1)$$

La funzione di correlazione ora calcolata non è in forma normalizzata; per ottenere ciò si divide l'espressione per $(f_2-f_1)/2$; l'operazione porta al noto algoritmo:

$$C(\tau) = \frac{\mathrm{Sen}\ \pi\tau\,(f_2 - f_1)}{\pi\tau\,(f_2 - f_1)}\ \mathrm{Cos}\ \pi\tau\,(f_2 + f_1)$$

L'andamento della funzione normalizzata è sotto riportato per:
f_1 = 1000 Hz f_2 = 2000 Hz $\tau_{\text{fondo scala}}$ = 2 mSec.



3) L 'algoritmo di calcolo della funzione di correlazione tra segnali definiti in bande di frequenze <u>non</u> rettangolari.

L' algoritmo di calcolo della funzione in oggetto si ottiene partendo dalla funzione di correlazione normalizzata ottenuta al paragrafo 1) :

$$C(\tau) = \mathrm{Cos}\,(\omega\tau) \qquad \textbf{3.1)}$$

e dalla funzione di densità spettrale $w(\omega)$ che caratterizza i segnali da correlare.

Per il calcolo della nuova funzione di correlazione dovremo risolvere il seguente integrale che andremo a commentare:

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} \mathbf{W(\omega)\ Cos\ (\omega\,\tau)\ d\,\omega} \qquad \textbf{3.2)}$$

La funzione da integrare è il prodotto tra la funzione di correlazione di un generico segnale sinusoidale e la funzione di densità spettrale che caratterizza i segnali da correlare.

I limiti di integrazione sono compresi tra frequenza zero ed infinito dato che il profilo della $W(\omega)$, non essendo rettangolare, si estende in essi.

Per sviluppare l'integrale è necessario conoscere la funzione che caratterizza $W(\omega)$; assumiamo pertanto, nel nostro caso, che tale funzione sia dovuta ad un circuito risonante serie; per tale filtro la $W(\omega)$ è definita come segue:

$$W(\omega) = \frac{4\ (\omega_f)^2\ \ \omega^2}{[\ \omega^2 - (\omega_o)^2]^2\ + 4\ (\omega_f)^2\ \omega^2} \qquad \textbf{3.3)}$$

dove $\omega = 2\,\pi\,f$; $(\omega_o)^2 = 1/(LC)$; $(\omega_f) = R/2L$

è immediato constatare che la funzione data è pari essendo $W(\omega) = W(-\,\omega)$.

Anche la funzione di correlazione 3.1) è pari essendo $\mathrm{Cos}\,(\omega\tau) = \mathrm{Cos}\,(-\,\omega\tau)$.

Dato che la 3.1) e la 3.3) sono entrambe pari è possibile riscrivere la 3.2) con i limiti di integrazione che si estendono tra $-\infty$ e $+\infty$ invece che tra 0 e $+\infty$, avendo cura a dividere per due il nuovo integrale:

$$C(\tau) = (1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) \ \mathrm{Cos}\ (\omega \tau) \ d\omega \qquad 3.4)$$

In virtù della formula d Eulero, che dimostra essere:

$$e^{jx} = \mathrm{Cos}\ x + j\ \mathrm{Sen}\ x$$

osservando inoltre che la funzione Sen x è dispari, quindi nullo il suo integrale tra limiti simmetrici rispetto allo zero, possiamo scrivere la 3.4) come segue:

$$C(\tau) = (1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) \ e^{j\omega\tau} \ d\omega \qquad 3.5)$$

La soluzione di questo integrale può essere affrontata secondo la teoria dei residui essendo W(ω) una funzione analitica; si può scrivere infatti:

$$C(\tau) = (1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) \ e^{j\omega\tau} \ d\omega =$$

$$= 2 \pi j \ \sum \text{Residui} \left[(1/2)\ W(\omega) \ e^{j\omega\tau} \right|_{\substack{\omega = \ \omega' + j\omega_f \\ \omega = -\omega' + j\omega_f}} \qquad 3.6)$$

con i poli $+\omega'+j\omega_f$ e $-\omega'+j\omega_f$, della **W**(ω), calcolati, dopo aver posto $\omega' = \sqrt{[(\omega_o)^2 - (\omega_f)^2]}$, mediante la scomposizione in fattori del denominatore della 3.3 e successiva trasformazione della W(ω) stessa in somma di frazioni.

La 3.6) si può scrivere pertanto come segue:

$$\mathbf{C(\tau)} = 2\pi \mathbf{j}\ (\omega' + j\omega_f)\ \left[(1/2)\ \mathbf{W}(\omega' + j\omega_f)\ e^{j(\omega' + j\omega_f)\tau} \right] +$$

$$+\ 2\pi \mathbf{j}\ (-\omega' + j\omega_f)\ \left[(1/2)\ \mathbf{W}(-\omega' + j\omega_f)\ e^{j(-\omega' + j\omega_f)\tau} \right]$$

che infine , mediante sviluppi algebrici e normalizzazione, diventa:

$$\mathbf{C(\tau)} = e^{-\omega_f |\tau|}\ [\ \mathrm{Cos}\ \omega' \tau\ - (\omega_f / \omega')\ \mathrm{Sen}\ (\omega'\ |\tau|)] \qquad 3.7)$$

Nel caso in cui il Q del circuito risonante sia elevato la 3.7) si può scrivere:

$$\mathbf{C(\tau)} = e^{-\omega_f |\tau|}\ \mathrm{Cos}\ \omega_o \tau \qquad 3.8)$$

L'andamento della funzione di correlazione della 3.8) è sotto riportato per:
L= 0.01 H ; C = 0.1 μF ; R = 6 Ω ; f_o = 5035 Hz ; Q = 52
ω_o = 31622 ; ω_f = 300 $\tau_{\text{fondo scala}}$ = 4 mSec.

4) La funzione di correlazione per segnali limitati in ampiezza

Le funzioni di correlazione esaminate in precedenza riguardano soltanto segnali analogici definiti in bande di frequenza specificate; da queste, secondo Van Vleck, discendono le funzioni di correlazione per segnali limitati in ampiezza anch'essi definiti in specifiche bande di frequenza.
Le espressioni di Van Vleck coinvolgono le funzioni ciclometriche con le quali si passa dalla funzione analogica data alla funzione a segnali limitati:
Ad esempio la funzione di correlazione **C(τ)** calcolata nel paragrafo 1) per segnali analogici sinusoidali:

$$C(\tau) = \mathrm{Cos}\,(\omega\tau)$$

si trasforma in funzione di correlazione **C(τ)*** per segnali limitati in ampiezza secondo la seguente funzione ciclometrica:

$$C(\tau)^* = (2/\pi)\ \mathrm{ArcoSen\ Cos}\,(\omega\tau).$$

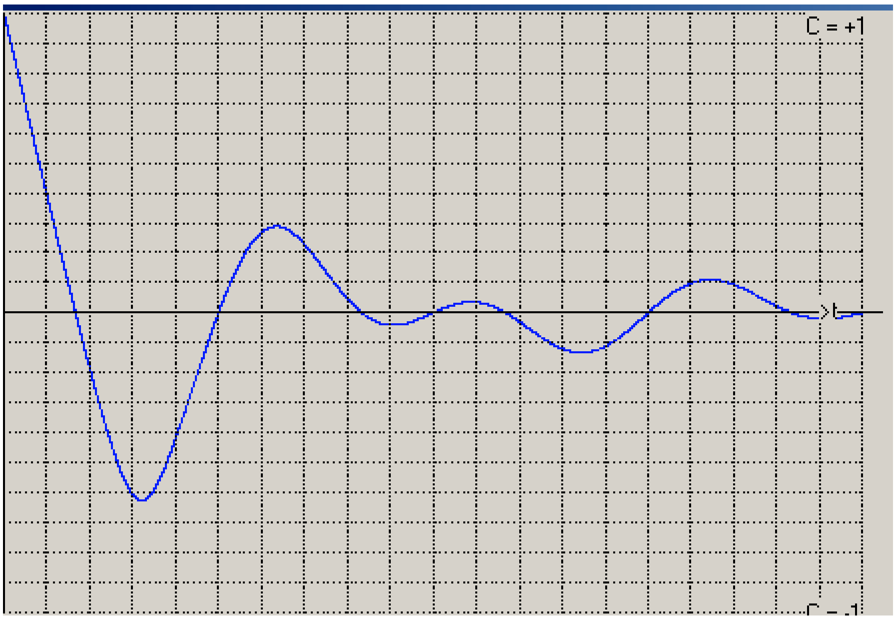
In modo analogo la funzione di correlazione **C(τ)** calcolata nel paragrafo 2) per segnali analogici definiti in bande di frequenze rettangolari:

$$C(\tau) = \frac{\mathrm{Sen}\ \pi\tau\,(f_2 - f_1)}{\pi\tau\,(f_2 - f_1)}\ \mathrm{Cos}\ \pi\tau\,(f_2 + f_1)$$

si trasforma in funzione di correlazione **C(τ)*** ciclometrica secondo l'espressione:

$$C(\tau)^* = (2/\pi)\ \mathrm{ArcSen}\left[\frac{\mathrm{Sen}\ \pi\tau\,(f_2 - f_1)}{\pi\tau\,(f_2 - f_1)}\ \mathrm{Cos}\ \pi\tau\,(f_2 + f_1)\right]$$

Queste nuove funzioni di correlazione sono simili alle originali dalle quali discendono a meno del profilo sul massimo che invece di seguire la legge sinusoidale presentano una netta cuspide così come mostra la figura



5) Come incide il rumore sulle funzioni di correlazione analogiche

Nella funzione di correlazione analogica definita in banda di frequenza rettangolare la **C(τ)** è subordinata all'ampiezza del segnale Si secondo Si^2 e risente del rumore Ni secondo Ni^2 così come mostrano le formule sotto riportate:

$$C(\tau) = Si^2 \, \frac{\mathrm{Sen}(6.28 \; DF \; \tau)}{(6.28 \; DF \; \tau)} \, \mathrm{Cos} \; (6.28 \; Fo \; \tau)$$

$$Fo = \frac{F2+F1}{2} \qquad DF = \frac{F2-F1}{2}$$

$$Nu = \sqrt{\frac{(\,Si^2 + Ni^2\,)^2 + (\,Si^2\,)^2}{4 \; R \; C \; (F2-F1)}} \qquad Su/Nu = (Si/Ni)^2 \sqrt{4 \; R \; C \; (F2-F1)}$$

Con l'ultima formula scritta in basso a destra si calcola il rapporto segnale rumore Su/Nu presente all'uscita del correlatore analogico.

6) Come incide il rumore sulle funzioni di correlazione per segnali limitati in ampiezza

Nella funzione di correlazione per segnali limitati in ampiezza definita in banda di frequenza rettangolare la **C(τ)*** è subordinata all'ampiezza del segnale Si e risente del rumore Ni secondo il rapporto Si^2 / Ni^2 così come mostrano le formule sotto riportate:

$$\mathbf{C(0)^*} = \frac{1}{3.14} \text{ Arcsen } \left\{ 1/[1+(Ni/Si)^2] \right\}$$

$$Nu = \frac{1}{3.14 \sqrt{(6/7)\ 4\ R\ C\ (F2\text{-}F1)}}$$

$$Su/Nu = (Si/Ni)^2 \sqrt{(6/7)\ 4\ RC\ (F2\text{-}F1)}$$

$$d \doteqdot 2(F2\text{-}F1)\ R\ C\ (Si/Ni)^4$$

Con la formula scritta in basso a destra si calcola il rapporto segnale rumore Su/Nu presente all'uscita del correlatore per segnali limitati in ampiezza.
Il valore del parametro probabilistico d è calcolabile per Si / Ni molto piccoli con l'ultima espressione.