

STENZEL . H & B.

Studio dei sistemi direttivi per il sonar

INDICE

1. Ungebündelte Strahlung. pag. 2

2. Gebündelte Strahlung.

A. Der Richtfaktor.

a) Bei einer bestimmten Frequenz. pag. 6

b) Der Richtfaktor bei einem Geräusch. pag. 27

c) Bei künstlicher Kompensation. pag. 31

B. Der Strahlungsfaktor.

a) Bei einer bestimmten Frequenz. pag. 37

b) Bei künstlicher Kompensation. pag. 46

Zweiter Teil.

Das Schallfeld in der Nähe des Strahlers.

3. Die Gruppe von zwei Einzelstrahlern. pag. 51

4. Die kreisförmige Kolbenmembran. pag. 61

Dritter Teil.

Das Schallfeld des Kugelstrahlers. pag. 80

5. Der einfache Kugelstrahler bestimmter Ordnung.

6. Der zusammengesetzte Kugelstrahler. pag. 85

7. Die durch eine starre Kugel verursachte Störung
des Schallfeldes.

a) Die Ableitung der allgemeinen Formel. pag. 104

b) Die Schallreflexion an einer starren Kugel. pag. 105

c) Das Schallfeld in der Umgebung der Kugel. pag. 109

Schrifttum. pag. 121

das Schallfeld auch für Aufpunkte in der Nähe berechnet werden. An einer Reihe von Beispielen wird gezeigt, daß die zunächst kompliziert erscheinenden Formeln für die praktische Berechnung durchaus brauchbar sind.

Um die Übersicht der Abhandlung nicht zu erschweren, wird die theoretische Ableitung im Text selbst nur so weit angegeben, als es zum Verständnis erforderlich ist, und im übrigen auf das vorhandene Schrifttum hingewiesen. Ferner wird ebenfalls aus Gründen der Einfachheit auf die Berechnung und Darstellung der Schallschnelle verzichtet und stets nur die Schalldruckamplitude zur Kennzeichnung des Schallfeldes benutzt. Dabei kann dann auf die Verwendung des Geschwindigkeitspotentials gänzlich verzichtet werden, da dieser Begriff eine mehr mathematische Bedeutung besitzt und erfahrungsgemäß dem praktischen Physiker keine Freude bereitet.

Bei allen Betrachtungen wird davon ausgegangen, daß eine bestimmte Geschwindigkeitsamplitude der schwingenden Membran oder, was auf dasselbe herauskommt, eine bestimmte Schallschnelle unmittelbar vor der ruhend gedachten Membran, vorgegeben ist.

Erster Teil.

Das Schallfeld in großer Entfernung vom Strahler.

1. Ungebündelte Strahlung.

Wir gehen aus von Strahlern nullter Ordnung, d. h. von Strahlern, deren strahlende Fläche sich konphas nach außen und nach innen bewegt. Der einfachste Fall wird durch eine atmende oder pulsierende Kugel verwirklicht (Abb. 1a). Hier ist die Geschwindigkeitsamplitude für alle Punkte der strahlenden Fläche dieselbe. Im allgemeinen wird die Bewegung der strahlenden Fläche durch den Verlauf der Geschwindigkeitsamplitude der Membran $w = w \cdot e^{i\omega t}$ beschrieben. Dabei wird w im allgemeinen an verschiedenen Punkten der strahlenden Fläche verschieden sein.

Es ist zweckmäßig, die Geschwindigkeitsamplitude w und nicht die Bewegungsamplitude a (wobei die Beziehung: $w = 2\pi n a$ besteht) einzuführen, da der letzteren nur in seltensten Fällen eine besondere Bedeutung zukommt.

Wir betrachten zunächst eine Reihe von Strahlerformen, wie sie in der Abb. 1 dargestellt sind. Die Strahler 1a bis 1d sind rotationssymmetrisch zu einer durch den Mittelpunkt gehenden vertikalen Achse gedacht. Die Strahler 1e bis 1g sind ebenfalls rotationssymmetrisch oder besitzen rechteckigen Querschnitt wie 1h. Dabei ist die Ruhelage der Membran stark gestrichelt (— — —), die äußere Extremlage der

Membran punktiert (.....) und die starre Abschlußwand des Strahlers stark liniert (—) gezeichnet. Die Maximalamplituden der periodisch (sinusförmig) sich bewegenden Membranen sind durch Pfeile in starker Vergrößerung angegeben. Die Voraussetzung der Gültigkeit der allgemeinen Wellengleichung verlangt, daß die Druck- und Geschwindigkeitsamplituden des Schallfeldes kleine Werte besitzen. Diese Voraussetzung ist nur bei ungewöhnlich starken Druckschwankungen (z. B. bei Explosionswellen) nicht erfüllt. Ferner soll auch der Abstand der symmetrisch zur Mittelebene schwingenden Membranen (z. B. in Abb. 1 e und 1 f) als so klein angenommen werden, daß die Nulllage praktisch mit dieser Mittelebene zusammenfallend angesehen werden kann.

Es ergibt sich dann, daß das Schallfeld sehr einfach bestimmt werden kann, wenn die beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

A. Die Ausdehnungen des Strahlers sind in jeder Richtung klein zur Wellenlänge.

B. Der Aufpunkt liegt in hinreichend großem Abstand von dem Strahler.

Aus den später noch zu erläuternden allgemeinen Formeln folgt dann, daß der Schalldruckverlauf in der einfachen Form

$$p_0 = p_0 e^{i(\omega t - kr + \pi/2)} \quad (1)$$

dargestellt wird, wobei die Schalldruckamplitude p_0 durch:

$$p_0 = \frac{c \cdot \sigma \cdot F \cdot w_m}{2 \lambda r} \quad (2)$$

und die gesamte abgestrahlte Schalleistung L_0 durch:

$$L_0 = \frac{p_0^2}{2c\sigma} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{2} c \cdot \sigma \pi \cdot \frac{F^2 \cdot w_m^2}{\lambda^2} \quad (3)$$

gegeben ist.

Wir sehen, daß die Schalldruckamplitude sich in einfachster Weise durch die maßgebenden Größen darstellt, wobei jede dieser Größen linear auftritt. Und zwar bedeutet:

σ die Dichte,
 c die Schallgeschwindigkeit } des Mediums,
 F die gesamte strahlende Fläche¹,

¹ Bei Membranen, die in einer starren Wand schwingen, werden wir die in den Halbraum strahlende Fläche mit F bezeichnen, so daß dann die 2 im Nenner von (2) fortfällt.

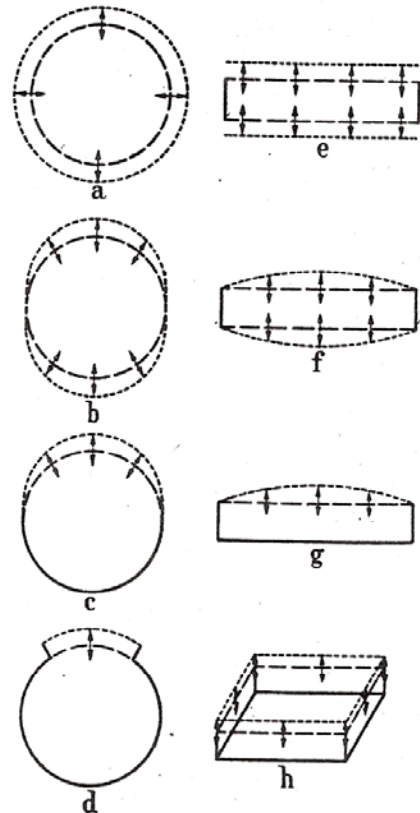


Abb. 1. Einfache Strahler.

w_m die mittlere Geschwindigkeitsamplitude der strahlenden Fläche,

r der Abstand des Aufpunktes vom Mittelpunkt des Strahlers,

λ die Wellenlänge,

$k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl,

$\omega = 2\pi n$ die Kreisfrequenz.

Das Produkt $c \cdot \sigma$ wird als Schallwiderstand bezeichnet. Seine Größe ist bei ebenen Wellen durch das Verhältnis der Schalldruckamplitude zur Schallschnelle (Schallgeschwindigkeitsamplitude) bestimmt. Für die beiden hauptsächlich in Frage kommenden Werte Luft bzw. Wasser ist $c \cdot \sigma$ durch 43 bzw. durch $1,5 \cdot 10^5$ in absoluten CGS-Einheiten gegeben.

Im allgemeinen Fall ist die Geschwindigkeitsamplitude $w(x, y, z)$ für die einzelnen Punkte (x, y, z) der Membran verschieden. Dann ist w_m definiert durch:

$$w_m = \frac{1}{F} \int_F w(x, y, z) dF. \quad (4)$$

Der Einfluß der Membran ist durch das Produkt $F \cdot w_m$ gegeben. Definieren wir als das Deformationsvolumen des Strahlers das während jeder Halbperiode von der schwingenden Fläche überstrichene Volumen, so haben zwei Strahler gleicher Frequenz gleiches Deformationsvolumen, wenn für beide das Produkt $F \cdot w_m$ den gleichen Wert hat. Denn die Bewegungsamplitude $a(x, y, z)$ unterscheidet sich von der Geschwindigkeitsamplitude $w(x, y, z)$ nur um einen konstanten Faktor ($w = 2\pi n \cdot a$).

Aus der Tatsache, daß die sehr verschiedenen Schwingungsformen der Abb. 1a bis 1h bei gleichem $F \cdot w_m$ dasselbe Schallfeld ergeben, werden wir ganz allgemein schließen: Bei Strahlern, die klein zur Wellenlänge sind und deren Membranbewegung gleichzeitig nach außen und gleichzeitig nach innen erfolgt, ist das Schallfeld in größerem Abstand allgemein durch die Formeln (1, 2) und (3) bestimmt. Das bedeutet: Unter den Voraussetzungen A und B ergeben zwei Schallstrahler derselben Frequenz dasselbe Schallfeld, wenn bei beiden $F \cdot w_m$ gleich ist, ohne daß die Bewegungsamplituden und die Form der Membranen einzeln übereinzustimmen brauchen. In der Abb. 2 sind drei verschiedene Strahler entsprechend Abb. 1e, 1f mit gleichem Deformationsvolumen, d. h. gleichem $F \cdot w_m$ dargestellt.

Die schraffierten Flächen stellen die Maximalamplitude der schwingenden Membran nach einer Seite in zwei zueinander senkrechten Ebenen dar. Dabei ist die der Abb. 2b entsprechende Geschwindigkeits-

amplitude durch $w = (1 - \varrho^2/\varrho_0^2)^2$ gegeben. Dann ergeben sich in den 3 Fällen der Abb. 2 für Fw_m die gleichen Werte:

$$\frac{1}{3} \varrho_0^2 \pi, \quad 2\pi \int_0^{\varrho_0} (1 - \varrho^2/\varrho_0^2)^2 \varrho d\varrho = \frac{1}{3} \varrho_0^2 \pi, \quad \frac{a^2 \pi}{6} = \frac{1}{3} \varrho_0^2 \pi.$$

Es ist zweckmäßig, sich ein einfaches Beispiel als Normalform einzuprägen, da daraus infolge des linearen Einflusses sämtlicher Größen der Schalldruck unter sehr allgemeinen Verhältnissen angegeben werden kann. Als eine solche Normalform betrachten wir eine Kolbenmembran in starrer Wand, die in Luft bei 800 Hz auf der Mittelachse in 100 cm Entfernung eine Schalldruckamplitude von 1 dyn/cm² erzeugt (das entspricht Schalldruckamplituden, wie sie beim normalen Sprechen unmittelbar vor dem Mund des Sprechers auftreten). Wir finden, daß dazu bei einer Geschwindigkeitsamplitude von 10 cm/sec die in den Halbraum strahlende Fläche 10 cm² betragen muß. Es ist besonders zu beachten, daß die Formel (2) für beliebige ebene gebündelte Strahleranordnungen gilt, wenn der Aufpunkt auf der Mittelachse in hinreichendem Abstand liegt. Dies wird im nächsten Kapitel erläutert. Also eine strahlende Fläche von 100 cm² ergibt im Aufpunkt auf der Mittelachse, der 10 m entfernt ist, ebenfalls eine Schalldruckamplitude von 1 dyn/cm². Schließlich gilt die Formel auch für den Kugelstrahler nullter Ordnung allgemein bei hinreichendem Abstand des Aufpunktes.

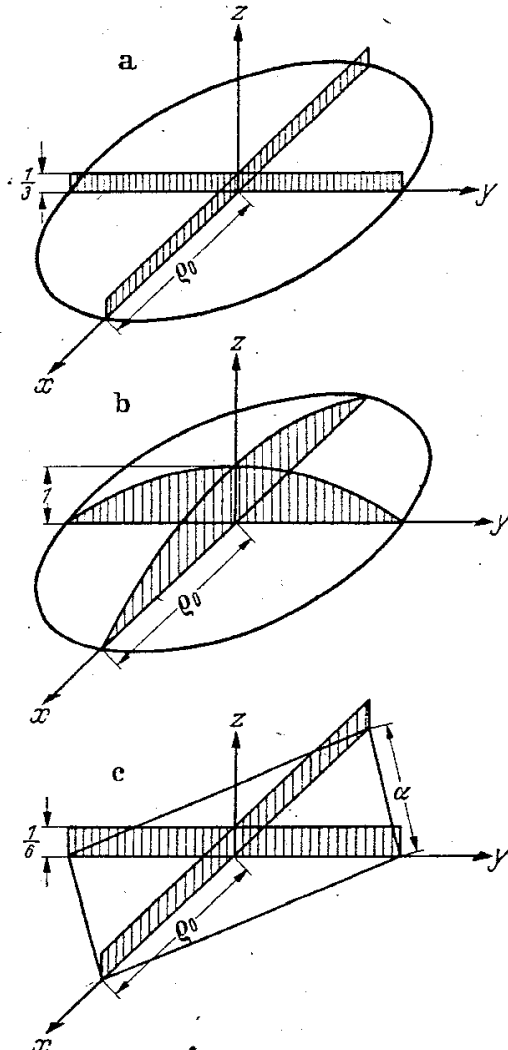


Abb. 2. Strahler mit gleichem Deformationsvolumen.

Die entsprechende Schalleistung pro cm² ist für die Normalform [nach (3)]:

$$\frac{L_0}{4\pi r^2} = \frac{1}{2 \cdot 43} = 1,16 \cdot 10^{-2} \text{ erg/sec cm}^2 = 1,16 \cdot 10^{-9} \text{ Watt/cm}^2.$$

Im Wasser ergibt sich unter denselben Voraussetzungen (bei gleicher Frequenz, also anderer Wellenlänge) die Schalldruckamplitude:

$$p_0 = 800 \text{ dyn/cm}^2$$

und die Schalleistung:

$$\frac{L_0}{4\pi r^2} = \frac{8^2 \cdot 10^4}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^5} = 2,13 \text{ erg/sec cm}^2 = 2,13 \cdot 10^{-7} \text{ Watt/cm}^2.$$

Man sieht, welcher maßgebenden Einfluß der „Schallwiderstand“ besitzt. Um der Membran im Wasser bei gleicher Frequenz dieselbe Geschwindigkeitsamplitude wie in der Luft aufzudrücken, muß die 184fache Leistung aufgebracht werden. Andererseits wird für eine Membran, die in Luft bei gleicher Wellenlänge dieselbe Leistung wie im Wasser abstrahlen soll, folgen:

$$\frac{w_l}{w_w} = \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^5}{43}} \approx 60,$$

d. h. die Geschwindigkeitsamplitude w_l der Membran in Luft ist dann 60mal so groß wie die Geschwindigkeitsamplitude w_w im Wasser, während die Bewegungsamplitude der Membran in Luft etwa 13mal so groß wie die in Wasser ist.

2. Gebündelte Strahlung.

A. Der Richtfaktor.

a) Bei einer bestimmten Frequenz.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung A fallen, machen aber dafür die Einschränkung, daß die Membran als Doppelmembran konphas nach zwei Seiten schwingt, wobei die Mittelebene in jedem Moment der Schwingung Symmetrieebene ist. Beispiele solcher Membranen sind in den Abb. 1e und 1f dargestellt. Da der ganze Vorgang oberhalb der Symmetrieebene das Spiegelbild des Vorganges unterhalb der Symmetrieebene darstellt, kann an Stelle der Symmetrieebene eine starre Wand eingeführt werden, ohne daß an dem Schallvorgang etwas geändert wird. An Stelle der doppelseitig wirkenden Membran kann man sich dann die eine Hälfte des Schallfeldes ebensogut durch eine einfache, in starrer unendlicher Wand schwingende, Membran erzeugt denken. Dies ist von Bedeutung, weil eine in starrer, großer Wand schwingende Membran in der Praxis häufiger auftritt. Ohne daß dies in jedem Fall noch mal besonders hervorgehoben wird, soll es sich in den folgenden Beispielen stets um solche Doppelmembranen, die symmetrisch zur Mittelebene schwingen, handeln oder um in einer starren Wand schwingende Membranen, wobei nur der eine Halbraum betrachtet wird, der durch die starre Wand abgeschlossen wird und in den die eine Hälfte der Membran mit der Fläche F strahlt. Stellen wir uns vor, daß die von den einzelnen Elementen des Strahlers herrührenden Elementarwellen im Aufpunkt zusammenwirken, so ist klar, daß für alle Richtungen dieses Zusammenwirken in gleicher Phase im weit entfernten Aufpunkt eintritt, solange die Einzelemente einen Abstand

d klein gegen λ voneinander besitzen. Diese Kugelsymmetrie (ungebündelte Strahlung) muß aber gestört werden, wenn dies nicht mehr der Fall ist, da dann im Allgemeinen die Elementarwellen mit verschiedenem, nicht mehr vernachlässigbarem Phasenunterschied im Aufpunkt ankommen (Abb. 3). Diesen veränderten Verhältnissen, die ihren Grund darin haben, daß der Strahler nicht mehr klein zur Wellenlänge ist, können wir durch Einführung des Richtfaktors \mathfrak{R} Rechnung tragen. Und zwar tritt an Stelle von (2) die Formel

$$p = p_0 \cdot \mathfrak{R}, \quad (5) \quad \text{Abb. 3. Ungebündelte Strahlung.}$$

wobei p_0 den durch (2) gegebenen Wert hat, während \mathfrak{R} durch das Integral über die Fläche F definiert ist:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{w_m \cdot F} \int_F w(x, y) \cdot e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)} dF, \quad (6)$$

Dabei ist die starre Wand mit der Membran (in der Ruhelage) in der Ebene des Koordinatensystems liegend gedacht. Da die XY -Ebene Symmetrieebene für das Schallfeld ist, können wir unsere Betrachtung auf den oberhalb der XY -Ebene liegenden Raum beschränken und daher den symmetrisch nach unten schwingenden Teil der Doppelmembran außer Betracht lassen (Abb. 4).

Es bedeuten α, β, γ die *Richtungswinkel* für die entsprechende Aufpunktsgerade, x, y die Koordinaten des zum Integrationselement dF gehörenden Punktes, $w(x, y)$ die entsprechende Geschwindigkeitsamplitude und $k = 2\pi/\lambda$. Wir bemerken, daß, wenn die Wellenlänge λ groß gegen x und y , d. h. groß gegen die Ausdehnungen der Membran ist, der Exponent unter dem Integral gegen null geht, so daß

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{w_m \cdot F} \int_F w(x, y) dF$$

ist, also wegen (4) gleich 1 wird, wie es zu erwarten war. Wesentlich ist, worauf bereits hingewiesen wurde, daß für großes F ebenfalls $\mathfrak{R} = 1$ wird, wenn die Aufpunktsgerade mit der Z -Achse zusammenfällt (wegen $\alpha = 90^\circ$ und $\beta = 90^\circ$).

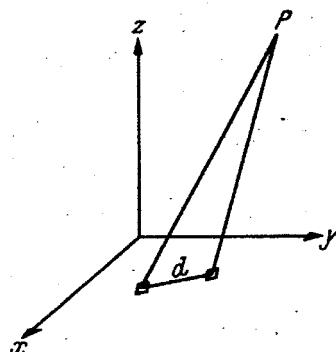


Abb. 3. Ungebündelte Strahlung.

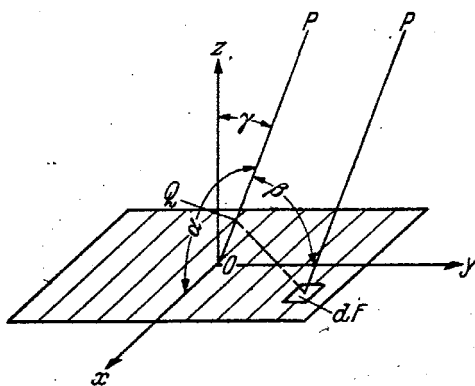


Abb. 4. Gebündelte Strahlung.

Die Gültigkeit von (5) ergibt sich aus der von RAYLEIGH angegebenen grundlegenden allgemeinen Beziehung¹:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_F \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \quad (7)$$

Indem wir an Stelle des Geschwindigkeitspotentials φ den Druck

$$p = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (8)$$

eingeführen und die Normalgeschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ durch

$$w = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (9)$$

ersetzen, erhalten wir zunächst:

$$p = \frac{i \cdot c \cdot \sigma}{\lambda} e^{i\omega t} \int_F w(x, y) \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \quad (10)$$

Wir wollen nun das Schallfeld nur in großer Entfernung von der strahlenden Fläche betrachten und setzen demgemäß voraus, daß der Aufpunkt P in *hinreichendem* Abstand R von O sich befindet, so daß die Verbindungslinien von ihm zu den einzelnen Strahlerelementen dF als parallel angesehen werden können (eine genauere Formulierung wird später [S. 53] gegeben). Füllen wir dann von dF , das durch die Koordinaten x, y bestimmt ist, das Lot auf OP mit dem Fußpunkt Q , so ist $OQ = x \cos \alpha + y \cos \beta$ und $r = R - (x \cos \alpha + y \cos \beta)$.

Da $R \gg x \cos \alpha + y \cos \beta$ ist, können wir im Nenner r durch R ersetzen und erhalten:

$$p = \frac{ic\sigma}{\lambda R} e^{i(\omega t - kR)} \int_F w(x, y) e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)} dF \quad (11)$$

und daraus unter Berücksichtigung von (2), (4) und (6) die Formel (5).

Wir wollen für das Weitere voraussetzen, daß die strahlende Fläche bzw. das Strahlersystem einen Mittelpunkt besitzt, der mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt und daß $w(x, y) = w(-x, -y)$ ist. (Das bedeutet: Zwei spiegelbildlich zum Membranmittelpunkt gelegene Membranpunkte haben gleiche Amplitude und Phase.) Dann läßt sich das Integral (11) in reeller Form schreiben. Es ist:

$$\Re = \frac{1}{w_m F} \int_F w(x, y) \cos [k(x \cos \alpha + y \cos \beta)] dF.$$

Wir wollen ferner die Aufpunktsgerade auf eine bestimmte Ebene (die Peilebene) beschränken, und zwar soll diese Ebene mit der ZY -

¹ The theory of sound. § 278.

Ebene zusammenfallen. Dann ist wegen $\alpha = 90^\circ$ und $\beta + \gamma = 90^\circ$ (Abb. 4):

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{w_m F} \int_F w(x, y) \cos[ky \sin \gamma] dF. \quad (12)$$

In vielen Fällen interessiert der Verlauf von \mathfrak{R} nicht für die ganze Peilebene, sondern es kommt oft, besonders bei scharf gebündelten Strahlern, nur auf die nächste Umgebung des Hauptmaximums bei $\gamma = 0^\circ$ an.

Für diesen Bereich kann man $\cos[ky \sin \gamma]$ durch $1 - \frac{1}{2} k^2 y^2 \sin^2 \gamma$ ersetzen und findet:

$$\mathfrak{R} = 1 - \frac{k^2 \sin^2 \gamma}{2 w_m F} \int_F w(x, y) y^2 dF.$$

Denken wir uns an Stelle des strahlenden Flächenelementes dF im Punkte x, y der Membran ein Massenelement $dm = \frac{w(x, y)}{w_m F} dF$ angebracht, so bezeichnet:

$$T_x = \frac{1}{w_m \cdot F} \int_F w(x, y) y^2 dF = \int_F y^2 dm,$$

das Trägheitsmoment dieser so mit Masse belegten ruhenden Membran (bei der Gesamtmasse 1) in bezug auf die X-Achse, und wir können für kleine γ schreiben:

$$\mathfrak{R} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot T_x. \quad (13)$$

Diese Formel ist oft geeignet, ohne große Rechnung die Peilschärfe von Strahleranordnungen zu übersehen.

Als Beispiel wollen wir 4 einfache Strahleranordnungen untersuchen (Abb. 5):

1. zwei punktförmige Strahler,
2. die Kreislinie, dicht besetzt mit Strahlern,
3. die rechteckige Kolbenmembran,
4. die kreisförmige Kolbenmembran.

Wir finden die Trägheitsmomente T und die entsprechenden Annäherungsformeln ohne Schwierigkeit:

$$1. \quad T_1 = r^2, \quad \mathfrak{R}_1 = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot r^2,$$

$$2. \quad T_2 = \frac{r^2}{2}, \quad \mathfrak{R}_2 = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot \frac{r^2}{2},$$

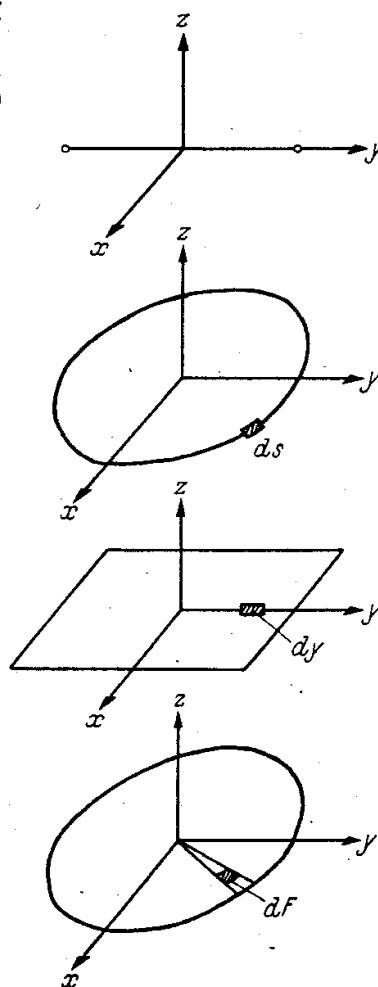


Abb. 5. Berechnung des Richtfaktors.

$$3. \quad T_3 = \frac{r^2}{3}, \quad \mathfrak{R}_3 = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot \frac{r^2}{3},$$

$$4. \quad T_4 = \frac{r^2}{4}, \quad \mathfrak{R}_4 = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \gamma \cdot \frac{r^2}{4}.$$

In diesen 4 Fällen lassen sich die Richtfaktoren allgemein durch Ausführung der Integration nach (6) berechnen¹. Es ist (vgl. Abb. 5):

zwei punktförmig

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{e^{i k r \sin \gamma} + e^{-i k r \sin \gamma}}{2} = \cos \left[\frac{2 \pi r}{\lambda} \sin \gamma \right], \quad (14)$$

in ebener

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{2}{2 \pi r} \int e^{i k (x \cos \alpha + y \cos \beta)} d s = \frac{1}{2 \pi} \int_0^{2 \pi} e^{i k r \sin \gamma \cos \varphi} d \varphi = J_0 \left(\frac{2 \pi r}{\lambda} \sin \gamma \right), \quad (15)$$

quadratisch

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{1}{2 r} \int_{-r}^{+r} e^{i k y \sin \gamma} d y = \frac{\sin \left(\frac{2 \pi r}{\lambda} \sin \gamma \right)}{\frac{2 \pi r}{\lambda} \sin \gamma}, \quad \left(\text{Lorenz'sche Messure} \right) \quad (16)$$

in ebener

$$\mathfrak{R}_4 = \frac{1}{r^2 \pi} \int_0^r \rho d \rho \int_0^{2 \pi} e^{i k \rho \sin \gamma \cos \varphi} d \varphi = \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho d \rho J_0(k \rho \sin \gamma) = 2 \cdot \frac{J_1 \left(\frac{2 \pi r}{\lambda} \sin \gamma \right)}{\frac{2 \pi r}{\lambda} \sin \gamma}. \quad (17)$$

Mit der Abkürzung: $\frac{2 \pi r}{\lambda} \sin \gamma = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma = x$ ergibt sich:

$$\mathfrak{R}_1 = \cos x, \quad \mathfrak{R}_2 = J_0(x), \quad \mathfrak{R}_3 = \frac{\sin x}{x}, \quad \mathfrak{R}_4 = \frac{2 J_1(x)}{x},$$

wobei $J_0(x)$ bzw. $J_1(x)$ die BESSELSche Funktion nullter bzw. erster Ordnung bedeutet. Durch die bekannten Reihenentwicklungen läßt sich die Richtigkeit der Annäherungsformeln hier direkt bestätigen. Es ist:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots, \quad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \dots, \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \dots,$$

$$\frac{2 J_1(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{8} + \dots$$

Um ein allgemeines Maß für die Peilschärfe zu bekommen, wollen wir nach dem Winkel φ in der Peilebene (ZY) fragen, den die Aufpunktgerade mit der Z -Achse bildet, wenn die Schallenergie auf die Hälfte des Maximalwertes abgesunken ist (d. h. die Amplitude von 1 auf $1/\sqrt{2}$) (Abb. 6).

¹ Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 4 (1927) S. 239–253.

Wir wollen diesen Winkel als die Halbwertsbreite dieser Peilebene bezeichnen¹. Eine einfache Rechnung ergibt dann mit praktisch ausreichender Genauigkeit folgende einfache Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 15^\circ \lambda/d \text{ für zwei punktförmige Strahler,} \\ \varphi_2 &= 20^\circ \lambda/d \text{ für die Kreislinie,} \\ \varphi_3 &= 25^\circ \lambda/d \text{ für die rechteckige Kolbenmembran,} \\ \varphi_4 &= 30^\circ \lambda/d \text{ für die kreisförmige Kolbenmembran.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Der Fehler ist dabei für $\lambda = d$ bereits unter 1° und nimmt für kleinere λ proportional ab.

Die Winkel 15° , 20° , 25° , 30° sind dann charakteristisch für die Peilschärfe. Wir wollen dies durch einen besonderen Namen, *das Peilmaß*, hervorheben. Das Peilmaß ist dabei im allgemeinen für jede Peilebene verschieden. Um den Richtfaktor für eine Peilebene *vollständig* zu übersehen, wird man die charakteristische Funktion in Abhängigkeit von x darstellen und unter der X -Achse einen veränderlichen Maßstab anbringen, der für jeden Wert von d/λ und für jeden Winkel γ den Wert des Richtfaktors abzulesen gestattet. So kann man aus der umstehenden Abb. 7 ohne weiteres den vollständigen Verlauf des Richtfaktors in Abhängigkeit von γ in den obigen 4 Beispielen für alle Werte von d/λ , die zwischen 0 und 8 liegen, sofort angeben. Will man z. B. den Richtfaktor der dicht besetzten Kreislinie

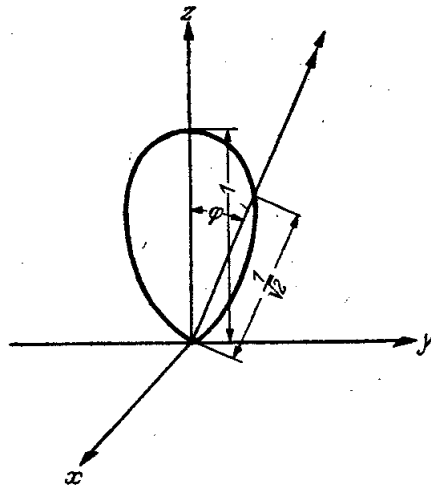


Abb. 6. Definition der Peilschärfe.

Will man z. B. den Richtfaktor der dicht besetzten Kreislinie $\mathfrak{R} = J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma\right)$ für $d/\lambda = 3$, $\gamma = 40^\circ$ ablesen, so hat man in Abb. 7 auf der Parallelen $d/\lambda = 3$ bis zum Schnittpunkt mit der Geraden 40° zu gehen und die entsprechende Ordinate auf der Kurve 2 abzulesen. Man findet dann: $\mathfrak{R} = +0,15$ (vgl. den punktierten Linienzug in Abb. 7).

Als ein weiteres Beispiel erwähnen wir die gerade Gruppe, die aus einer Anzahl gleicher und in gleichem Abstand auf einer Geraden angeordneter ungerichteter Einzelstrahler besteht. Wegen der besonderen Bedeutung für die Praxis wollen wir diese Anordnung genauer untersuchen. Besitzen die auf der Y -Achse in gleichem Abstand d voneinander angeordneten Strahler die Koordinaten:

$$y_p, y_{p-1}, \dots, y_{-p}, y_{-p-1}, \dots, y_{-p-1}, y_{-p},$$

¹ Dabei ist vorausgesetzt, daß es sich um eine einigermaßen wirksame Bündelung handelt, so daß die Halbwertsbreite höchstens 30° beträgt.

wobei der Koordinatenanfangspunkt bei ungerader Anzahl ($n = 2q - 1$) mit dem mittelsten Strahler zusammenfallen soll und bei gerader Anzahl ($n = 2q$) in der Mitte zwischen den mittelsten Strahlern liegen

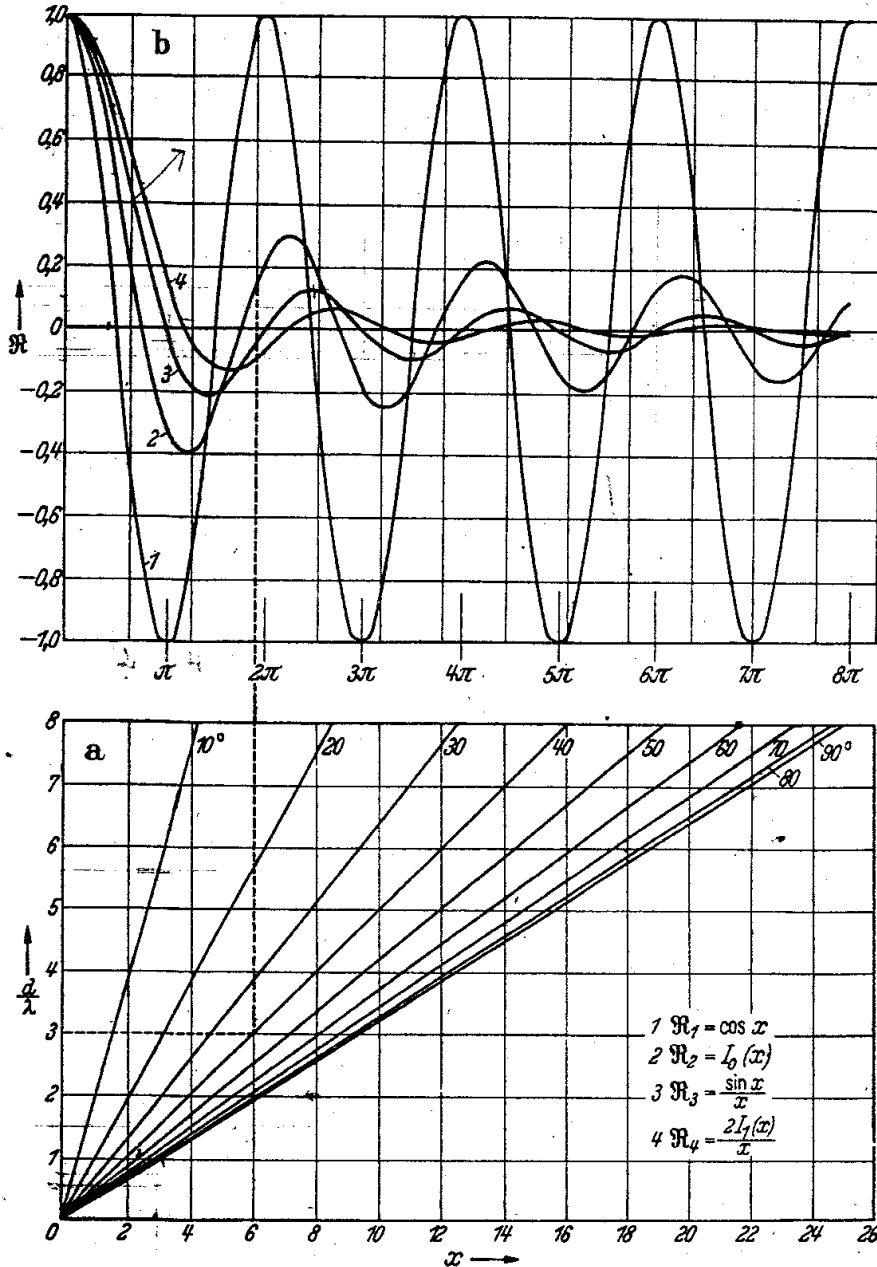


Abb. 7. Allgemeine Darstellung des Richtfaktors. 1. Richtfaktor des aus 2 Strahlern (Abstand d) bestehenden Systems. 2. Richtfaktor der dicht besetzten Kreislinie (Durchmesser d). 3. Richtfaktor der dicht besetzten rechteckigen Fläche (Länge d) in der Symmetrieebene. 4. Richtfaktor der dicht besetzten Kreisfläche (Durchmesser d).

soll, so ist im ersten Fall $p = q - 1$, $p - 1 = q - 2$ usw., im zweiten Fall $p = q - \frac{1}{2}$, $p - 1 = q - \frac{3}{2}$ usw. zu setzen (Abb. 8).

Allgemein gilt dann für einen beliebigen Index l die Beziehung $y_l = ld$. Setzen wir zur Abkürzung $e^{ikd \sin \gamma} = z$, so finden wir den

Richtfaktor aus (6), indem wir das Integral durch das Summenzeichen ersetzen:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{n} \sum_{m=-p}^{m=+p} z^m$$

Die rechts stehende geometrische Reihe läßt sich leicht summieren und ergibt:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{n} z^{-p} \frac{z^{2p+1} - 1}{z - 1} = \frac{1}{n} \frac{z^{p+\frac{1}{2}} - z^{-(p+\frac{1}{2})}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}},$$

daraus folgt, wenn wir für z wieder $e^{ikd \sin \gamma}$ einführen:

$$\mathfrak{R} = \frac{\sin \left[\left(p + \frac{1}{2} \right) kd \sin \gamma \right]}{n \sin \left[\frac{kd}{2} \sin \gamma \right]}$$

Da wir bei ungerader Anzahl $p + \frac{1}{2}$ durch $q - \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$, bei gerader Anzahl $p + \frac{1}{2}$ durch $q = n/2$ zu ersetzen haben, so ergibt sich allgemein (wobei noch $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ eingesetzt ist):

$$\mathfrak{R} = \frac{\sin \left[\frac{n \pi d}{\lambda} \sin \gamma \right]}{n \sin \left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right]} \quad (19)$$

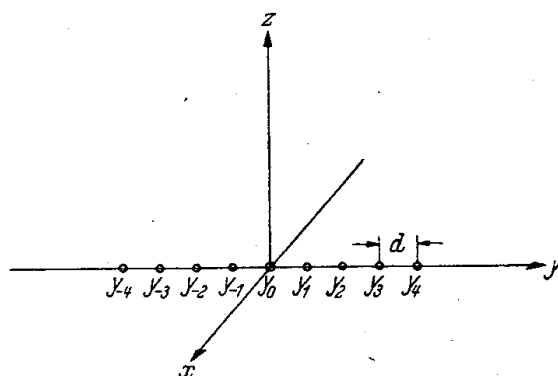


Abb. 8. Zur Berechnung der geraden Gruppe.

Um eine klare Übersicht über den allgemeinen Verlauf des Richtfaktors (19) bei verschiedenen d/λ zu bekommen, betrachten wir zunächst die durch

$$r = \left| \frac{\sin n \varphi}{n \sin \varphi} \right| \quad (20)$$

gegebene Funktion, indem wir in (19) \mathfrak{R} durch r und $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$ durch φ ersetzt haben. Die durch (20) in Polarkoordinaten r, φ gegebene Kurve läßt sich nun leicht übersehen. Das Hauptmaximum ($r = 1$) wird für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ (und Vielfache von π) erreicht. Dazwischen liegen $n - 2$ Nebenmaxima, die durch die Nullstellen $\varphi = \frac{k\pi}{n} (k=1, 2, \dots, n-1)$ getrennt sind.

Zeichnet man parallel zur Ordinatenachse im Abstand $1/n$ eine Gerade, so berührt diese die Kurve in den n -Punkten, die den Winkeln

$$\varphi = \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{3}{2n} \pi, \quad \dots, \quad \frac{2n-1}{2n} \pi$$

entsprechen. Und man sieht, daß die Lage der Nebenmaxima in guter Annäherung durch die Winkel

$$\varphi = \frac{3}{2n} \pi, \quad \frac{5}{2n} \pi, \quad \dots, \quad \frac{2n-3}{2n} \pi$$

bestimmt sind. (Wegen der Symmetrie zur Ordinatenachse können wir uns auf die Werte $\varphi \leq \pi$ beschränken.) Die Abb. 9 veranschaulicht die Verhältnisse für $n = 6$, wobei die punktierte Kurve die Ellipse mit den Halbachsen 1 und $\frac{1}{6}$ darstellt, auf der sämtliche Maximalwerte von $r = \frac{\sin 6\varphi}{6 \sin \varphi}$ liegen. Die Nebenmaxima (im ersten Quadranten) fallen sehr angenähert mit den Berührungspunkten zwischen Ellipse

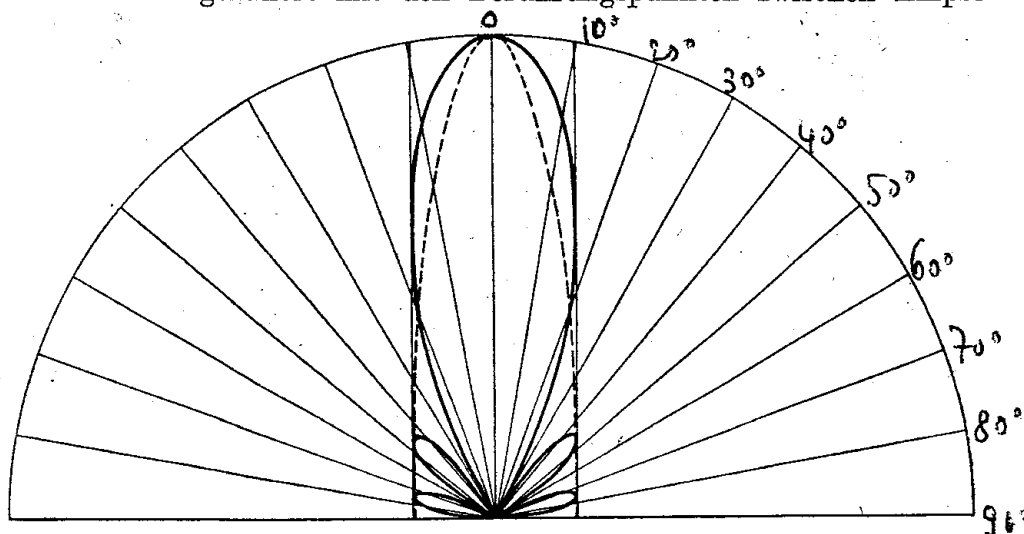


Abb. 9. Kennzeichnung der Lage und Größe der Nebenmaxima des Richtfaktors bei der geraden Gruppe von 6 Strahlern.

und der parallel im Abstand $\frac{1}{6}$ zur Ordinatenachse gezogenen Geraden zusammen.

Zur genaueren Bestimmung muß man die sich aus $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ ergebende Bedingungsgleichung:

$$n \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} n \varphi \quad (21)$$

lösen. Dies geht einfach, wenn man die Gleichung (21) in der Form schreibt:

$$\varphi = \frac{1}{n} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (n \operatorname{tg} \varphi). \quad (22)$$

Der gefundene Näherungswert wird in die rechte Seite von (22) eingesetzt und ergibt eine bessere Annäherung. Diese bessere Annäherung wird wieder in die rechte Seite von (22) eingesetzt usw. Setzt man als erste Annäherung $\varphi_0 = \frac{2m+1}{2n} \pi$ in die rechte Seite von (22) ein, so ergibt sich als zweite Annäherung $\varphi_0 - \varepsilon_0$, wobei ε_0 durch $\operatorname{tg} n \varepsilon_0 = \frac{1}{n \operatorname{tg} \varphi_0}$ gegeben ist. Ist z. B. $n = 6$ und $m = 1$, so folgt $\varphi_0 = 45^\circ$ und aus $\operatorname{tg} 6 \varepsilon_0 = \frac{1}{6}$, $\varepsilon_0 = 1^\circ 35'$, also $\varphi_1 = 43^\circ 25'$. Die dritte Näherung ergibt $\varepsilon_1 = 0^\circ 5'$, also $\varphi_2 = \varphi_1 - \varepsilon_1 = 43^\circ 20'$. Und es stimmt $6 \operatorname{tg} \varphi_2 = 5,66$ mit $\operatorname{tg} 6 \varphi_2 = 5,67$ bis auf einen Fehler unter 1% überein.

Bezeichne ich die zu den Maximalwerten gehörenden Koordinaten mit r_m, φ_m , so müssen gleichzeitig die Gleichungen (20) und (21) erfüllt sein. Also:

$$r_m^2 n^2 \sin^2 \varphi_m = \sin^2 n \varphi_m. \quad (23)$$

$$n^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_m = \operatorname{tg}^2 n \varphi_m; \quad (24)$$

daraus folgt durch Division:

$$r_m^2 \cos^2 \varphi_m = \cos^2 n \varphi_m$$

und durch Addition von (23): $r_m^2 [n^2 \sin^2 \varphi_m + \cos^2 \varphi_m] = 1.$

Das heißt: Die Maximalwerte liegen sämtlich auf einer Ellipse mit den Halbachsen 1 und $1/n$. Um nun die Abhängigkeit des Richtfaktors von d/λ und γ zu übersehen, haben wir nur zu überlegen, wie die diskutierte r, φ -Kurve durch die Transformation $\mathfrak{R} = r, \varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$ in der $r \gamma$ -Ebene abgebildet wird. Wegen der Symmetrie können wir uns auf den ersten Quadranten ($0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$) beschränken und können aus dem entsprechenden Bereich $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi d}{\lambda}$ die Lage und Anzahl der Haupt- und Nebenmaxima angeben. Die Größe ändert sich offenbar bei der Transformation nicht.

Vergleichen wir zwei beliebige gerade Gruppen I und II, wobei I durch n_1, d_1, λ_1 , II durch n_2, d_2, λ_2 gekennzeichnet ist, so ist:

$$r_1 = \frac{\sin n_1 \varphi_1}{n_1 \sin \varphi_1}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi d_1}{\lambda_1} \sin \gamma,$$

$$r_2 = \frac{\sin n_2 \varphi_2}{n_2 \sin \varphi_2}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi d_2}{\lambda_2} \sin \gamma.$$

Da für die Beurteilung der Peilschärfe nur kleine Werte von γ in Frage kommen, kann $\sin \varphi$ durch φ ersetzt werden. Da die Ungleichung

$$\frac{\sin n_1 \varphi_1}{n_1 \varphi_1} > \frac{\sin n_2 \varphi_2}{n_2 \varphi_2}$$

(für kleine φ) dann und nur dann erfüllt ist, wenn $n_1 \varphi_1 < n_2 \varphi_2$ ist, so folgt, daß die Peilschärfe von II größer, gleich oder kleiner als die von I ist, je nachdem $n_2 d_2 / \lambda_2$ größer, gleich oder kleiner als $n_1 d_1 / \lambda_1$ ist. Bei gleicher Frequenz und gleicher Gesamtlänge hat also die dichter besetzte Gruppe eine geringere Peilschärfe. Und zwei Gruppen von verschiedener Länge und verschiedener Strahleranzahl können gleiche Peilschärfe besitzen. Zum Beispiel haben die Gruppen $n_1 = 18, d_1 = \lambda/6$ und $n_2 = 3, d_2 = \lambda$ wegen $\frac{n_1 d_1}{\lambda_1} = \frac{n_2 d_2}{\lambda_2} = 3$ gleiche Peilschärfe, während ihre Basislängen sich wie 17:12 verhalten.

Handelt es sich um eine aus mehreren Strahlern in starrer Wand strahlende Anordnung, so läßt sich die Berechnung wesentlich vereinfachen, wenn die Anordnung aus gleichen Einzelstrahlern besteht (so daß jeder Einzelstrahler für sich allein den gleichen Richtfaktor

ergeben würde). Denken wir uns nämlich an Stelle jedes gerichteten Einzelstrahlers einen ungerichteten (punktförmigen) Strahler und nennen den Richtfaktor des so aus ungerichteten Einzelstrahlern bestehenden Systems \mathfrak{R}_1 , und den Richtfaktor jedes Einzelstrahlers \mathfrak{R}_2 , so ist der Richtfaktor \mathfrak{R} der gesamten Anordnung einfach durch das Produkt gegeben. Also: $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{R}_2$.

Zum Beispiel ergibt sich der Richtfaktor einer aus zwei gleichen kreisförmigen Kolbenmembranen in starrer Wand bestehenden Anordnung mit dem Radius r und dem Mittelpunktsabstand a :

$$\mathfrak{R} = \cos \left[\frac{\pi a}{\lambda} \cos \beta \right] \frac{2 J_1(kr \sin \gamma)}{kr \sin \gamma}. \quad (25)$$

Diesen von BRIDGE¹ wohl zuerst ausgesprochenen Satz beweisen wir folgendermaßen:

Gegeben ist in der XY -Ebene ein System I von n ungerichteten (punktförmigen) Strahlern mit den Koordinaten:

$$(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2) \dots (x'_n, y'_n),$$

den Geschwindigkeitsamplituden:

$$w'_1, w'_2 \dots w'_n$$

und den strahlenden Flächen:

$$F'_1, F'_2 \dots F'_n,$$

dabei wird

$$w'_1 F'_1 + w'_2 F'_2 + \dots + w'_n F'_n = A'$$

gesetzt.

Ferner ist ein System II von m ungerichteten Strahlern entsprechend durch die Größen charakterisiert:

$$(x''_1, y''_1), (x''_2, y''_2), \dots (x''_m, y''_m),$$

$$w''_1, w''_2 \dots w''_m,$$

$$F''_1, F''_2 \dots F''_m,$$

$$w''_1 F''_1 + w''_2 F''_2 + \dots + w''_m F''_m = A''.$$

Jetzt soll an Stelle jedes Strahlers im System II das System I gesetzt werden, so daß das neue System III entsprechend charakterisiert wird durch die Größen:

$$\left. \begin{array}{l} (x''_p + x'_1, y''_p + y'_1), (x''_p + x'_2, y''_p + y'_2) \dots (x''_p + x'_n, y''_p + y'_n) \\ w''_p \cdot w'_1, \quad w''_p \cdot w'_2, \quad \dots \quad w''_p \cdot w'_n \\ F''_p \cdot F'_1, \quad F''_p \cdot F'_2, \quad \dots \quad F''_p \cdot F'_n \end{array} \right\} p=1, 2, 3 \dots m.$$

¹ Vgl. H. Poincaré, Theorie de la lumière. S. 158.

Der Richtfaktor \mathfrak{R}''' des Systems III ergibt sich dann aus der allgemeinen Formel (6), wobei das Integral durch das Summenzeichen ersetzt werden muß, durch:

$$\mathfrak{R}''' = \frac{1}{A' A''} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n w'_p F''_p w'_q F'_q e^{ik[(x'_p + x'_q) \cos \alpha + (y'_p + y'_q) \cos \beta]},$$

während der Richtfaktor \mathfrak{R}' von I durch:

$$\mathfrak{R}' = \frac{1}{A'} \sum_{q=1}^n w'_q F'_q e^{ik[x'_q \cos \alpha + y'_q \cos \beta]}$$

und der Richtfaktor \mathfrak{R}'' von II durch:

$$\mathfrak{R}'' = \frac{1}{A''} \sum_{p=1}^m w'_p F''_p e^{ik[x'_p \cos \alpha + y'_p \cos \beta]}$$

gegeben ist.

Daraus folgt dann sofort: $\mathfrak{R}''' = \mathfrak{R}' \cdot \mathfrak{R}''$. Dieser Satz kann dazu dienen, aus der einfachen geraden Gruppenanordnung andere abzuleiten, deren Richtfaktor eine einfache Form besitzt. Charakterisieren wir den Richtfaktor einer geraden Gruppe, die aus n ungerichteten Strahlern mit gleicher Fläche in gleichem Abstand auf der Y -Achse mit den Geschwindigkeitsamplituden w_1, w_2, \dots, w_n besteht, durch

$$\mathfrak{R} = [w_1, w_2, \dots, w_n],$$

und bezeichnen insbesondere den Richtfaktor von n Einheitsstrahlern durch

$$\mathfrak{E}_n = [1, 1, \dots, 1] = \frac{\sin n\varphi}{n \sin \varphi}, \quad (26)$$

so ist

$$\mathfrak{E}_2 = [1, 1] = \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi} = \cos \varphi.$$

Ersetzen wir jetzt jeden Strahler dieser aus 2 Elementen (auf der Y -Achse) bestehenden Gruppe durch die gleiche Gruppe, so wird aus der ursprünglichen Gruppe:

$$\mathfrak{E}_2 = \quad \times \quad \times$$

offenbar die folgende Gruppe:

$$\mathfrak{E}_2^2 = \quad \times \quad \times \quad \times$$

Das heißt: Wir bekommen eine Gruppe aus 3 Elementen (1 2 1). Der entsprechende Richtfaktor [1, 2, 1] ist dann nach dem Satz von BRIDGE gleich $\cos^2 \varphi$.

Entsprechend folgt:

$$\mathfrak{E}_2^3 = [1, 1][1, 1][1, 1] = [1, 3, 3, 1] = \cos^3 \varphi,$$

$$\mathfrak{E}_2^n = [1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}] = \cos^n \varphi.$$

Um das symbolische Produkt $\mathfrak{R}_a \cdot \mathfrak{R}_b = [a_1, a_2, \dots, a_m][b_1, b_2, \dots, b_n]$ zu finden, d. h. um den Richtfaktor der geraden Gruppe zu finden, die entsteht, wenn jeder Einzelstrahler der einen Gruppe durch die gleiche

und gleich gerichtete Gruppe ersetzt wird (so daß die ursprünglichen Strahler und sämtliche Strahler des an ihre Stelle getretenen auf derselben Geraden liegen), bilden wir das folgende rechteckige Schema:

	b_1	b_2	b_3		b_n
a_1	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$		
a_2	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$		
a_3	$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$		
a_m					$a_m b_n$

Man übersieht dann leicht, daß man zur Bestimmung von $\mathfrak{R}_a \cdot \mathfrak{R}_b$ die Summen der in den schrägen Diagonalen vorhandenen Produkte zu bilden hat. So ergibt sich:

$$\mathfrak{R}_a \cdot \mathfrak{R}_b = [a_1 b_1, a_2 b_1 + a_1 b_2, a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3, + \dots \\ + a_m b_{n-1} + a_{m-1} b_n, a_m b_n].$$

Das Ergebnis läßt sich auch in einfacher Weise durch die Betrachtung des Produktes $(a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m)(b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n) = a_1 b_1 x^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) x^3 + \dots + a_m b_n x^{m+n}$ erläutern.

Interessanter ist die umgekehrte Frage: Wie man aus einer geraden Gruppe von fest vorgegebener Empfängeranzahl und festem Abstand allein durch Ändern der einzelnen Geschwindigkeitsamplituden, d. h. durch Ändern der Empfindlichkeit, den Richtfaktor ändern kann.

So können wir aus 6 Strahlern, die in gleichem Abstand d in einer Geraden angeordnet sind, die folgenden 7 Richtfaktoren erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \mathfrak{C}_6 = [1, 1, 1, 1, 1, 1] = \frac{\sin 6\varphi}{6 \sin \varphi}, \\ \mathfrak{R}_2 &= \mathfrak{C}_5 \cdot \mathfrak{C}_2 = [1, 2, 2, 2, 2, 1] = \frac{\sin 5\varphi}{5 \sin \varphi} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}, \\ \mathfrak{R}_3 &= \mathfrak{C}_4 \cdot \mathfrak{C}_3 = [1, 2, 3, 3, 2, 1] = \frac{\sin 4\varphi}{4 \sin \varphi} \cdot \frac{\sin 3\varphi}{3 \sin \varphi}, \\ \mathfrak{R}_4 &= \mathfrak{C}_4 \cdot \mathfrak{C}_2^2 = [1, 3, 4, 4, 3, 1] = \frac{\sin 4\varphi}{4 \sin \varphi} \cdot \left(\frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}\right)^2, \\ \mathfrak{R}_5 &= \mathfrak{C}_3^2 \cdot \mathfrak{C}_2 = [1, 3, 5, 5, 3, 1] = \left(\frac{\sin 3\varphi}{3 \sin \varphi}\right)^2 \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}, \\ \mathfrak{R}_6 &= \mathfrak{C}_3 \cdot \mathfrak{C}_2^3 = [1, 4, 7, 7, 4, 1] = \frac{\sin 3\varphi}{3 \sin \varphi} \cdot \left(\frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}\right)^3, \\ \mathfrak{R}_7 &= \mathfrak{C}_2^5 = [1, 5, 10, 10, 5, 1] = \left(\frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \varphi}\right)^5 = \cos^5 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Dabei ist zur Abkürzung $\varphi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$ gesetzt.

Die entsprechenden Richtfaktoren sind in der Abb. 10 dargestellt. Es ist nach dem angegebenen Satz vom Trägheitsmoment ohne weiteres klar, daß die Peilschärfe von \mathfrak{R}_1 am größten ist. Da die Empfindlichkeit der Strahler sich immer mehr in den Mittelpunkt konzentriert, so muß notwendig die Peilschärfe immer mehr abnehmen. Dies zeigt

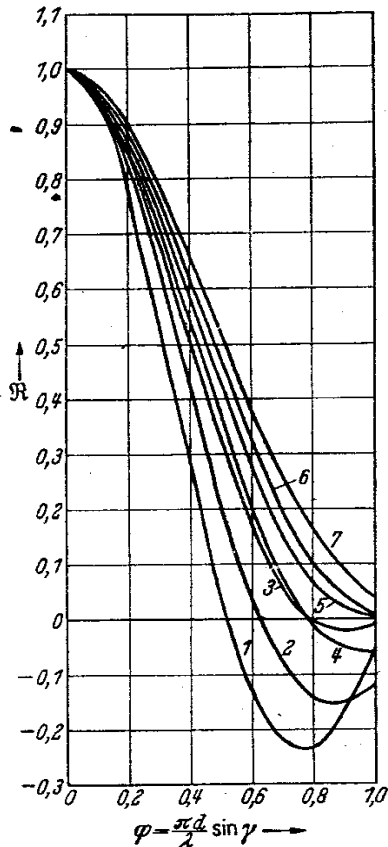


Abb. 10. Peilschärfe der geraden Gruppe von 6 Empfängern mit verschiedener Empfindlichkeit.

Abb. 10. Wichtiger erscheint es, daß in bezug auf die auftretende Größe der Nebenmaxima ein umgekehrter Gang besteht. Der $\varphi > 1$ entsprechende Teil der Kurve ist in Abb. 11 stark vergrößert dargestellt, um die Größe der Nebenmaxima zur Darstellung zu bringen, und wir erkennen, daß in bezug auf die Größe der Nebenmaxima \mathfrak{R}_1 sehr ungünstig ist.

So bleibt z. B. bei \mathfrak{R}_6 die Größe der Nebenmaxima unter 1%, gegenüber 24% bei \mathfrak{R}_1 . Wir haben somit die Möglichkeit, bei einer festen

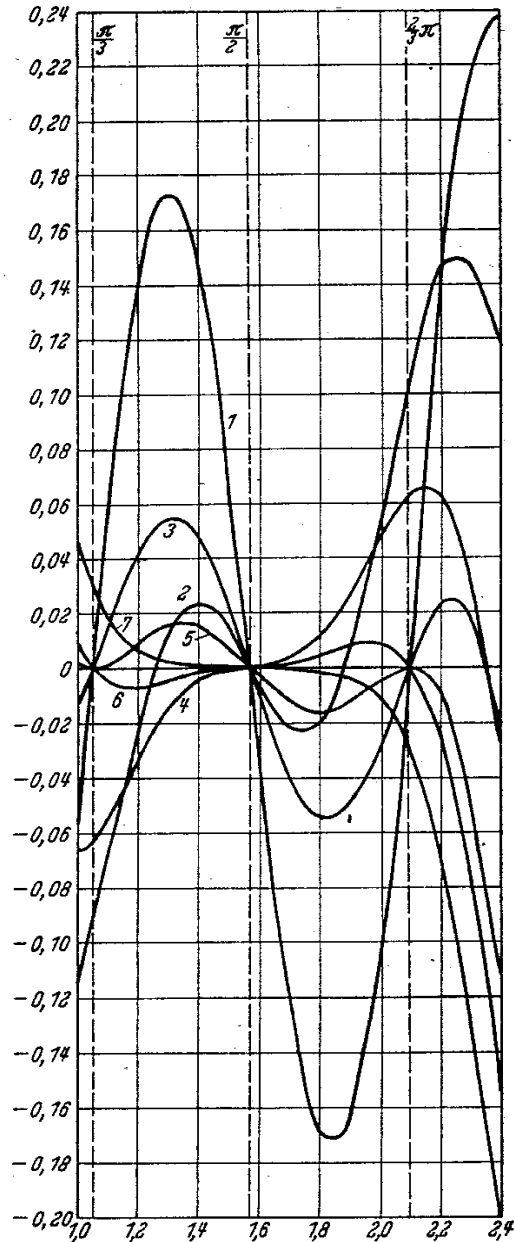


Abb. 11. Nebenmaxima der geraden Gruppe von 6 Empfängern mit verschiedener Empfindlichkeit.

Anordnung von Strahlern lediglich durch Verändern der Empfindlichkeit (d. h. der Verstärkung) je nach Bedarf die Peilschärfe oder die Größe der Nebenmaxima in günstigem Sinne zu beeinflussen.

Um den Richtfaktor für die rechteckige Gruppe abzuleiten, gehen wir aus von dem allgemeinen Richtfaktor der geraden Gruppe. Dabei ersetzen wir in der früheren Formel (19) $\sin \gamma$ durch $\cos \beta$, um zu erreichen, daß die Beziehung, unabhängig von der Peilebene, gilt. Für die Formel (19) war es notwendig, daß die Peilebene mit der ZY -Ebene zusammenfiel. Wir erhalten dann:

$$\mathfrak{R} = \frac{\sin \left[\frac{n\pi d}{\lambda} \cos \beta \right]}{n \sin \left[\frac{\pi d}{\lambda} \cos \beta \right]}. \quad (28)$$

Denken wir uns jetzt jeden Einzelstrahler durch die gleiche aus m Strahlern zur X -Achse parallele Gruppe ersetzt, so ergibt sich allgemein der Richtfaktor dieser rechteckigen Gruppe nach der früheren Regel (Abb. 12):

$$\mathfrak{R} = \frac{\sin \left[\frac{m\pi d_1}{\lambda} \cos \alpha \right] \sin \left[\frac{n\pi d_2}{\lambda} \cos \beta \right]}{m \sin \left[\frac{\pi d_1}{\lambda} \cos \alpha \right] \cdot n \sin \left[\frac{\pi d_2}{\lambda} \cos \beta \right]}. \quad (29)$$

Lassen wir d_1 und d_2 immer kleiner werden und m und n beliebig wachsen, so daß in der Grenze $md_1 = a$ und $nd_2 = b$ ist, so erhalten

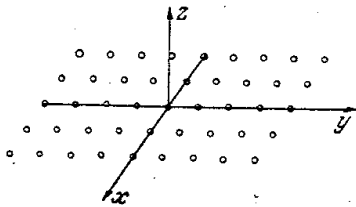


Abb. 12. Rechteckige Gruppe.

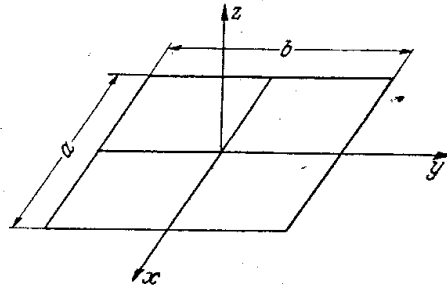


Abb. 13. Rechteckige Kolbenmembran.

wir den allgemeinen Richtfaktor der rechteckigen Kolbenmembran (Abb. 13):

$$\mathfrak{R} = \frac{\sin \left[\frac{a\pi}{\lambda} \cos \alpha \right] \sin \left[\frac{b\pi}{\lambda} \cos \beta \right]}{\frac{a\pi}{\lambda} \cos \alpha \cdot \frac{b\pi}{\lambda} \cos \beta}. \quad (30)$$

Dabei hat man sich die Membran als nach beiden Seiten der XY -Ebene konphas schwingend oder als einfache Kolbenmembran, die in einer unendlichen starren Wand schwingt, vorzustellen.

An Stelle der dichtbesetzten Kreislinie wird in der Praxis häufig eine Kreisgruppe benutzt, die aus einer bestimmten Anzahl (n) von Strahlern besteht, die in gleichem Abstand auf einem Kreis vom Durch-

messer d angeordnet sind¹. Wählen wir n als gerade Zahl ($n = 2m$), so läßt sich durch Zusammenfassung von je zwei diametral gegenüberliegenden Strahlern für den Richtfaktor leicht die folgende Beziehung ableiten:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left\{ \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \left[\cos \left(\varphi - \frac{\pi k}{m} \right) \right] \right\}. \quad (31)$$

Dabei ist die Aufpunktsgerade durch φ und γ (s. Abb. 14) bestimmt. Insbesondere für größere m ist die Berechnung nach (31) sehr zeitraubend. Unter Benutzung der BESSELSchen Funktionen läßt sich die Summe in eine unendliche Reihe verwandeln, die für die Rechnung wesentlich bequemer ist. Und zwar ergibt sich:

$$\mathfrak{R} = J_0 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{pm} J_{2pm} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) \cdot \cos 2pm \varphi. \quad (32)$$

Die praktische Bedeutung dieser zunächst umständlich erscheinenden Beziehung erkennt man sofort, wenn man bedenkt, daß die ersten Glieder in der Summe J_{2m} , J_{4m} usw. sehr schnell praktisch vernachlässigbare Werte annehmen, so daß es im allgemeinen genügt, das erste Glied J_{2m} zu berücksichtigen.

Im übrigen kann man mit Hilfe von (32) auch die oft wichtige Frage entscheiden, wie dicht man die Besetzung der Strahler auf der Kreislinie wählen muß, damit der Richtfaktor sich praktisch von dem der kontinuierlich besetzten Kreislinie nicht mehr unterscheidet. Wählen wir etwa 4 Empfänger, so ist das maßgebende Korrektionsglied absolut kleiner als $\left| 2J_4 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right) \right|$. Bezeichnen wir als Hauptteil der Charakteristik von $\mathfrak{R} = J_0 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right)$ den Teil von $\gamma = 0$ ($J_0 = 1$) bis $\gamma = \gamma_1$, wobei γ_1 der ersten Nullstelle entspricht, dann ist γ_1 durch $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma_1 = 2,4$ bestimmt, und da $J_4(x) < 0,06$ für $x < 2,4$, so ändert sich der Hauptteil der Charakteristik nicht. Das heißt: Die *Peilschärfe* einer Kreisgruppe von 4 Strahlern ist völlig gleichwertig der Peilschärfe einer dicht mit Strahlern besetzten Anordnung, gleichgültig, wie groß der Radius der Anordnung gewählt ist. Ebenso kann man schließen, daß der *gesamte* Verlauf des Richtfaktors der Kreisgruppe hinreichend genau durch $J_0 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma \right)$ wiedergegeben ist, wenn die Anzahl n so groß ist, daß die Bedingung:

$$n \geq \frac{\pi d}{\lambda} + 2 \quad (33)$$

erfüllt ist.

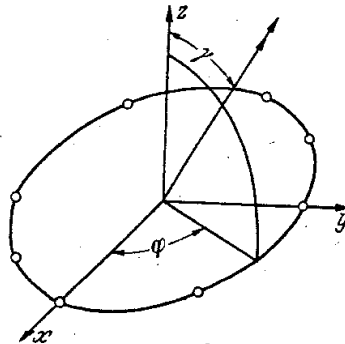


Abb. 14. Berechnung des Richtfaktors der Kreisgruppe.

¹ Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 6 (1929) S. 170.

Da der Umfang des Kreises $\pi d = n \cdot a$ ist, wobei a der auf dem Bogen gemessene Abstand ist, so können wir die Bedingung (33) so formulieren, daß der auf dem Kreise gemessene Abstand von zwei benachbarten Strahlern etwas kleiner als λ (genauer $a/\lambda < 1 - 2/n$) sein muß, damit der Kreisgruppenrichtfaktor durch $J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma\right)$ gegeben ist.

Mit der *Peilschärfe* einer Anordnung ist die Frage nach der *Trennschärfe* eng verknüpft. Dabei handelt es sich um die Frage, wann eine Empfangseinrichtung in der Lage ist, zwei in großer Entfernung und

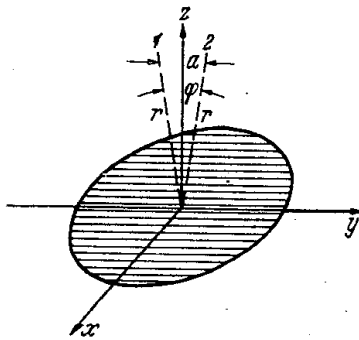


Abb. 15. Trennschärfe der kreisförmigen Kolbenmembran.

kleinem Abstand voneinander befindliche Schallquellen getrennt wahrzunehmen. Denken wir uns symmetrisch zur Mittellinie der Empfangseinrichtung in großer Entfernung r und in der Nähe der Mittellinie je eine Schallquelle (1 und 2) (Ton) und denken wir uns eine Kreisfläche als Empfangseinrichtung und diese um die X-Achse gedreht, so wird das von jedem Strahler herrührende Hauptmaximum getrennt in Erscheinung treten, wenn der Abstand a der Strahler hinreichend groß ist (Abb. 15).

Nimmt man mit RAYLEIGH an, daß die Maxima dann getrennt werden können, wenn das Maximum des einen mit dem ersten Minimum des anderen zusammenfällt, so folgt aus der Tatsache, daß die Gleichung:

$$\frac{2J_1\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi} = 0$$

für $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi = 3,83$ erfüllt ist, als notwendige Bedingung: $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \geq 3,83$.

Daraus folgt wegen $\sin \varphi \approx \varphi = a/r$

$$d/\lambda > 1,22 r/a. \quad (34)$$

Um also in großer Entfernung r und kleinem Abstand a befindliche Strahler mit einem akustischen Objektiv trennen zu können, muß der in λ gemessene Durchmesser des Objektivs mindestens gleich r/a sein.

Die bisherige Betrachtung bezog sich ausschließlich auf den Fall, wo alle Teile der strahlenden Membran bzw. des strahlenden Systems sich mit gleicher Amplitude und gleicher Phase bewegen. In der Praxis läßt sich dies durchaus nicht immer erreichen. Im allgemeinen ist die an der Membran angreifende Kraft nicht gleichmäßig über die ganze Fläche verteilt, sondern greift im Mittelpunkt oder längs einer Linie an. Da es absolut starre Membranen nicht gibt (vor allem dann nicht, wenn

für die Membranen in Rücksicht auf einen guten Wirkungsgrad und Frequenzgang außer der Starrheit noch möglichst geringes Gewicht erforderlich ist), so wird die etwa im Mittelpunkt angreifende Kraft infolge der (gedämpften) Ausbreitung der elastischen Transversalwellen mit endlicher Geschwindigkeit weder in gleicher Phase noch in gleicher Amplitude z. B. für die Randelemente wirken können, sobald die Ausdehnung der Membran nicht mehr klein zur Wellenlänge dieser Transversalwelle ist. Ferner ist die Membran durch ihre Halterung am Rande meist in ihrer Bewegung gehemmt. Prinzipiell wird es keine Schwierigkeit machen, der Annahme einer verschiedenen Phase in unseren Formeln Rechnung zu tragen. Wir hätten dazu nötig, die vorgegebene Geschwindigkeitsamplitude $w(x, y)$ als komplexe Größe anzusetzen. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir uns auf eine veränderliche Amplitude beschränken und demgemäß $w(x, y)$ als reelle Funktion annehmen.

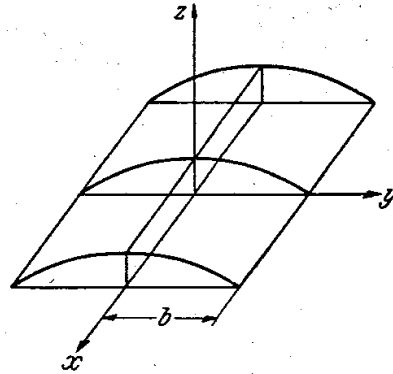


Abb. 16. Schwingungsform der rechteckigen Membran $w(x, y) = 1 - y^2/b^2$.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den Richtfaktor in der ZY-Ebene, der in Abb. 16 dargestellten rechteckigen Membran, wobei die Abbildung die Membran im Moment der größten Ausbiegung darstellt.

Und zwar soll w durch $w(y) = 1 - y^2/b^2$ gegeben sein. Wir finden:

$$w_m \cdot F = 2a \int_{-b}^{+b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2a \cdot 2b \cdot \frac{2}{3}.$$

Also: $w_m = \frac{2}{3}.$

Und: $\Re = \frac{2a}{w_m F} \int_{-b}^{+b} e^{iky} \sin \gamma \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy,$

$$\Re = \frac{3}{u^2} \left(\frac{\sin u}{u} - \cos u\right), \quad (35)$$

wobei

$$u = \frac{2\pi b}{\lambda} \sin \gamma$$

gesetzt ist.

Um das Peilmaß zu finden, haben wir den Wert von u zu berechnen, für welchen $\Re = 0,707$ ist. Daraus folgt $u = 1,8$. Dann ist das Peilmaß gleich $1,8/\pi = 33^\circ$ und die Halbwertsbreite φ durch $\varphi = 33^\circ \lambda/2b$ gegeben. Mit der Annäherungsformel würden wir finden:

$$\Re = 1 - \left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)^2 \frac{\sin^2 \gamma}{10},$$

und daraus: $\varphi = 33,5^\circ \cdot \lambda/2b.$

Als zweites Beispiel für die rechteckige Membran wählen wir (Abb. 17):

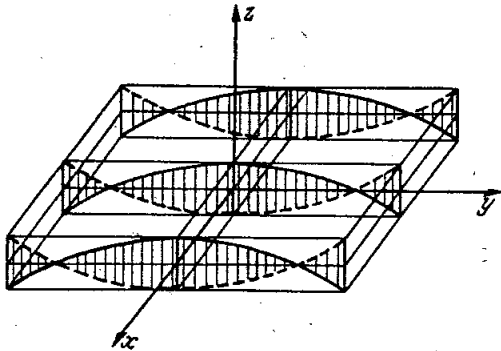


Abb. 17. Schwingungsform der rechteckigen Membran $w(x, y) = 1 - 2y^2/b^2$.

$$w(x, y) = 1 - 2y^2/b^2$$

und finden:

$$w_m = \frac{1}{3}.$$

Für den Richtfaktor in der ZY-Ebene ergibt sich:

$$\mathfrak{R} = \frac{12}{u^2} \left(\frac{\sin u}{u} - \cos u \right) - 3 \frac{\sin u}{u}.$$

Bestimmen wir hier das Peilmaß aus:

$$\frac{12}{u^2} \left(\frac{\sin u}{u} - \cos u \right) - 3 \frac{\sin u}{u} = 0,707, \quad (36)$$

so folgt: $u = 4,4$, also das Peilmaß gleich $4,4/\pi = 80^\circ$ und die Halbwertsbreite $\varphi = 80^\circ \cdot \lambda/2b^1$. Hier tritt etwas Neues ein, indem \mathfrak{R}

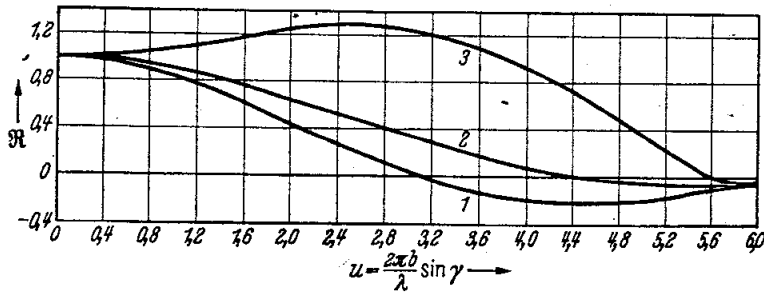


Abb. 18. 1. Richtfaktor der rechteckigen Kolbenmembran
2. Richtfaktor der rechteckig eingespannten Membran
3. Richtfaktor der rechteckigen Membran mit Knotenlinie } in der Symmetrieebene.

auf der Z-Achse kein Maximum, sondern ein Minimum besitzt. Die Reihenentwicklung von \mathfrak{R} ergibt: $\mathfrak{R} = 1 + \frac{u^2}{10} \dots$

Ein Vergleich der Richtfaktoren der rechteckigen Kolbenmembran mit der Seitenlänge $2b$ und der beiden letzten Membranen zeigt Abb. 18.

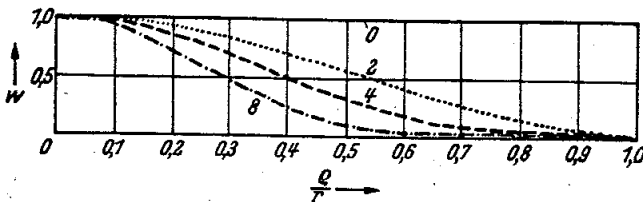


Abb. 19. Schwingungsformen $w(r) = (1 - r^2/r^2)^n$ für $n = 0, 2, 4, 8$.

Man erkennt, wie wesentlich die Änderung ist, wenn an Stelle der erwünschten Kolbenmembran eine Membran mit Knotenlinien wirksam ist. Andererseits kann die Erkenntnis nutzbar verwertet werden, wenn es sich

darum handelt, bei einer großen Membran (die notwendig ist, um die nötige Energie unterzubringen), eine scharfe Bündelung zu vermeiden.

Als drittes Beispiel wählen wir die am Rande fest eingespannte kreisförmige Membran. Hier können wir die Rechnung allgemein für

¹ S. die Fußnote auf S. 11.

die durch $w(\rho) = (1 - \rho^2/r^2)^n$ gegebenen Kurven (die Abb. 19 stellt die Kurven $w(\rho) = (1 - \rho^2/r^2)^n$ für $n = 0, 2, 4, 8$ dar) durchführen. Und zwar finden wir¹:

$$w_m = \frac{1}{n+1} \quad \text{und:} \quad \mathfrak{R}_n = 2^{n+1} \cdot (n+1)! \frac{J_{n+1}(u)}{u^{n+1}}, \quad (37)$$

wobei $J^{n+1}(u)$ die BESSELSche Funktion $(n+1)$ ter Ordnung darstellt und $u = \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma$ gesetzt ist.

Aus der mit dem Trägheitsmoment berechneten Annäherungsformel:

$$\mathfrak{R}_n = 1 - \frac{r^2 \pi^2 \sin^2 \gamma}{n+2}$$

finden wir die Halbwertsbreite:

$$\varphi = 15^\circ \cdot \sqrt{n+1} \cdot \lambda/r.$$

Der vollständige Verlauf der den Schwingungsformen der Abb. 19 entsprechenden Richtfaktoren ist in der Abb. 20 für $n = 0, 2, 4, 8$ dargestellt. Zu erwähnen ist noch, daß durch lineare Kombination

der Schwingungsformen ($w = (1 - \rho^2/r^2)^n$ eine beliebige rotationssymmetrische Schwingungsform der Membran (auch mit Knotenlinien) mit beliebiger Annäherung dargestellt werden kann.

Und zwar können wir zu einer allgemeinen Schwingung der Membran, die durch

$$w(\rho) = a_0 + a_1(1 - \rho^2/r^2) + a_2(1 - \rho^2/r^2)^2 + \dots + a_n(1 - \rho^2/r^2)^n \quad (38)$$

gekennzeichnet ist, den zugehörigen Richtfaktor allgemein angeben. Es ist:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \dots + \frac{1}{n+1}a_n} \left[2a_0 \frac{J_1(u)}{u} + 2^2 \cdot 1! a_1 \frac{J_2(u)}{u^2} + \dots + 2^{n+1} \cdot n! \frac{J_{n+1}(u)}{u^{n+1}} \right]. \quad (39)$$

Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn der Ausdruck im Nenner:

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \dots + \frac{1}{n+1}a_n$$

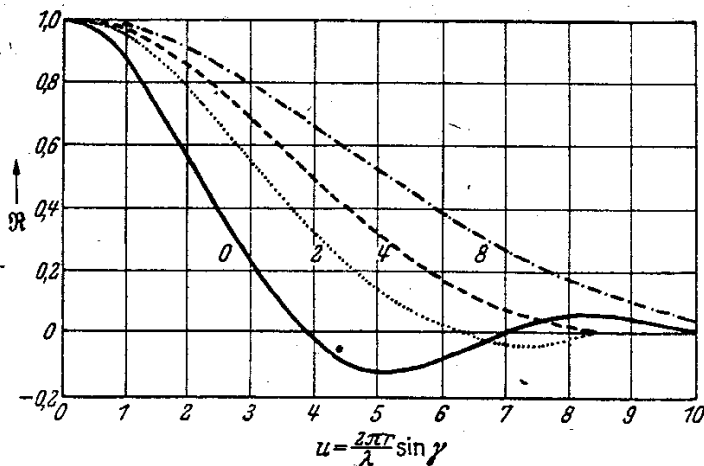


Abb. 20. Richtfaktor der kreisförmigen Membran mit der Schwingungsform $w(\rho) = (1 - \rho^2/r^2)^n$ für $n = 0, 2, 4, 8$.

¹ Ann. d. Phys. Bd. 7 (1930) S. 972.