

---

MAURIZIO FEDERICI

Centro di studio per le comunicazioni elettriche – Sezione di Milano

**L'eco sonora di ritorno da una sfera  
in regime impulsivo**

ESTRATTO DA: « LA RICERCA SCIENTIFICA »

Anno 28° – N. 8 – Agosto 1958

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE  
ROMA

**Riassunto:** Viene determinata l'eco sonora emessa da una sfera perfettamente riflettente di raggio  $r$  colpita da un'onda sonora a scalino rappresentata dalla funzione  $1(t)$  di Heaviside.

Dalle note formule che danno l'eco riflessa da una sfera colpita da un'onda sonora sinusoidale vien determinato l'operatore funzionale che esprime il rapporto fra l'onda sonora riflessa e quella incidente e questo viene valutato con un procedimento di approssimazione ricavando la funzione riflessa sonora per una pressione incidente del tipo  $1(t)$ .

Si mostra che l'onda sonora riflessa può considerarsi formata da tre parti, una dovuta alle componenti dello spettro della funzione  $1(t)$  che hanno lunghezza d'onda minore di  $0,2 r$  e che vengono riflesse totalmente appena l'onda sonora incide sulla sfera, una dovuta alle componenti aventi lunghezze d'onda comprese fra  $0,2 r$  ed  $r$  la cui riflessione totale inizia sostanzialmente quando il diametro della superficie colpita dall'onda nel cammino è  $0,75 r$  e infine una terza dovuta alle componenti aventi lunghezze d'onda superiore a  $r$  e che vengono riflesse parzialmente quando l'onda abbraccia tutta la sezione maestra.

L'onda sonora riflessa totale è un impulso ondulatorio che si spegne praticamente quando l'onda ha sorpassato la sfera.

È ben noto che quando una sfera perfettamente rigida è colpita da un'onda sonora di pressione  $p$ , avente andamento sinusoidale nel tempo con pulsazione  $w$ , si ha un'eco di ritorno, la cui intensità dipende dalla pulsazione e dal diametro della sfera.

Non è noto peraltro quale sia l'andamento della pressione sonora d'eco che ritorna indietro dalla sfera quando questa è colpita da un impulso sonoro, sia questo dovuto ad impulsi di frequenza sinusoidale o più semplicemente alla brusca variazione di una pressione continua.

Il fenomeno presenta invece interesse perché il metodo di ricerca di discontinuità o di ostacoli con metodi di eco trova larga applicazione nella ricerca di falle nei materiali e di ostacoli subacquei con ultrasuoni. La deformazione che l'impulso subisce quando urta un ostacolo avente dimensioni longitudinali paragonabile alle sue dimensioni trasversali può gettar luce sulle caratteristiche dell'ostacolo stesso.

La sfera è l'unico corpo di dimensioni finite per il quale sia stato possibile determinare matematicamente le caratteristiche dell'eco riflessa per una pressione sonora sinusoidale. Qui ci proponiamo di indicare le caratteristiche dell'eco riflessa dovute alla brusca variazione di una pressione continua. Da questa è poi possibile ottenere con procedimenti di integrazione l'eco dovuta ad una pressione sonora impulsiva di andamento qualunque.

Si consideri una sfera rigida di raggio  $r_0$ , colpita da una pressione sonora originata da una sorgente puntiforme posta in  $P$  e distante  $R$  dal centro della sfera. Al centro della sfera e in assenza di questa la pressione incidente è espressa dalla for-

mula seguente nella quale  $p$  rappresenta la pressione sonora prodotta dalla sorgente a distanza unitaria:

$$(1) \quad p_1 = \frac{p_o}{R} e^{j\left(\omega t - KR + \frac{\pi}{2}\right)} = p \frac{e^{-jKR}}{R}$$

dove  $w$  è la pulsazione,  $R$  la distanza della sorgente sonora dalla sfera,  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$  essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda nel mezzo, del suono di pulsazione  $w$ . Il centro della sfera è l'origine  $O$  delle coordinate sferiche  $r, \gamma$ . La pressione sonora riflessa sarà:

$$(2) \quad p_2 = -\frac{p_o}{R} e^{j\left(\omega t - KR + \frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{Kr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) j^n U_n(Kr_o) P_n \cos \gamma}{U_n(Kr_o) + j V_n(Kr_o)} [S_n(Kr) + j C_n(Kr)]$$

essendo  $S_n$  e  $C_n$  le funzioni sferiche di Legendre e  $U_n$  e  $V_n$  delle funzioni derivate. [1], [2].

La formula può semplificarsi considerevolmente quando si voglia calcolare la pressione sonora nel punto da cui è partita l'onda sonora, cioè nel punto di coordinate  $\gamma = 0$  ed  $r = R$ . Allora essendo  $Kr \gg 1$  si ha:

$$(3) \quad S_n(Kr) + j C_n(Kr) = j^{n+1} e^{-jKR}$$

ed essendo  $\cos \gamma = 1$ :

$$(4) \quad P_n(\cos \gamma) = 1$$

e quindi:

$$(5) \quad p_2 = -\frac{p_o}{R} e^{j\left(\omega t - 2KR + \frac{\pi}{2}\right)} \frac{r_o}{R} \cdot \frac{1}{Kr_o} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) U_n(Kr_o)}{U_n(Kr_o) + j V_n(Kr_o)}$$

La formula (5) rappresenta la pressione sonora di eco. Il rapporto fra la pressione sonora riflessa e quella a distanza unitaria dalla sorgente di pulsazione  $w$  si può scrivere:

$$(6) \quad \frac{p_2}{p} = -\frac{e^{-2jKR}}{2R} \cdot \frac{r_o}{R} \cdot 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) U_n(Kr_o)}{U_n(Kr_o) + j V_n(Kr_o)} = -\frac{e^{-2j\omega t_1}}{2R} \cdot \frac{r_o}{R} \cdot 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) U_n(\omega t_o)}{U_n(\omega t_o) + j V_n(\omega t_o)} = \frac{e^{-2j\omega t_1}}{2R} \cdot \frac{r_o}{R} \cdot F(j\omega)$$

con:

$$(7) \quad F(j\omega) = (-2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) U_n(\omega t_o)}{U_n(\omega t_o) + V_n(\omega t_o)}$$

essendo  $t_1$  e  $t_o$  il tempo impiegato dal suono a percorrere rispettivamente la distanza  $R$  dalla sorgente al centro della sfera e il raggio  $r_o$  della sfera.

Si supponga ora che la sfera venga colpita da una pressione sonora bruscamente crescente dal valore  $O$  al valore  $1$  al tempo  $t = o$ , cioè espressa dalla funzione di Heaviside.

I metodi del calcolo operazionale non sono qui praticamente applicabili, non essendo ancora nota la funzione corrispondente all'operatore funzionale  $F(jw)$  rappresentato dalla formula (7). Ma è possibile determinare l'andamento della pressione sonora di eco adattando metodi grafici di calcolo approssimato. In tale metodo la funzione di Heaviside viene rappresentata dalla formula:

$$(8) \quad 1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}wt}{w} dw$$

e se la funzione di trasferimento è rappresentata con la formula:

$$(9) \quad F(jw) = A(w) e^{j\alpha(w)}$$

la risposta alla funzione  $1(t)$  (in questo caso la pressione sonora riflessa) sarà:

$$(10) \quad \varphi(t) = \frac{1}{2} A(o) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(w) \frac{\text{sen}(wt + \alpha(w))}{w} dw$$

La (10) rappresenta la pressione sonora, a parte il termine  $r_o/2R^2$  che è un'attenuazione con la distanza e a parte il termine costante  $e^{-2j\omega t_1}$  che rappresenta semplicemente uno spostamento dell'origine dei tempi. A tale proposito si tenga presente che con le notazioni indicate il tempo  $t = o$  nella (10) corrisponde all'istante nel quale un'eco proveniente dal punto  $O$  centro della sfera ritorna al punto  $P$  in cui è posta la sorgente sonora. Echi giungenti in  $P$  prima del tempo  $t = o$  saranno quindi echi provenienti da punti posti più vicini del centro della sfera e quelli giungenti dopo provengono da punti più lontani. Tale precisazione è importante per fissare bene l'andamento del fenomeno.

La funzione  $F(jw)$  dipende sia da  $w$  che da  $r_o$ . È possibile peraltro tracciare una funzione universale indipendente da  $r_o$  purché si operi una trasformazione di coordinate. Si può introdurre una nuova variabile tempo  $\varepsilon$  espresso in percentuale del tempo  $t_o$ :

$$(11) \quad \varepsilon = \frac{t}{t_o}$$

allora:

$$(12) \quad wt = Kr_o \varepsilon$$

e quindi invece dell'operatore  $F(jw)$  si può utilizzare l'operatore  $F(jKr_o)$  purché si utilizzi come variabile temporale la nuova coordinata  $\varepsilon$ . La funzione  $F(jKr_o)$  è stata tracciata in ampiezza e in fase nella fig. 1 dove i punti rappresentano valori numerici riportati dallo Stenzel in [2]. Il calcolo di  $\varphi(t)$  può essere fatto approssi-

mando le funzioni  $A(w)$  e  $\alpha(w)$  con dei segmenti di retta entro un certo intervallo di frequenze e calcolando l'integrale in (10) come somma di integrali parziali [3].

Un attento esame di tale operatore e alcuni tentativi di approssimazione hanno mostrato che, per ottenere risultati attendibili da un calcolo grafico, è necessario porre la massima attenzione alla conservazione delle fasi, mentre è possibile seguire più grossolanamente l'andamento dell'ampiezza. L'operatore può essere diviso allora

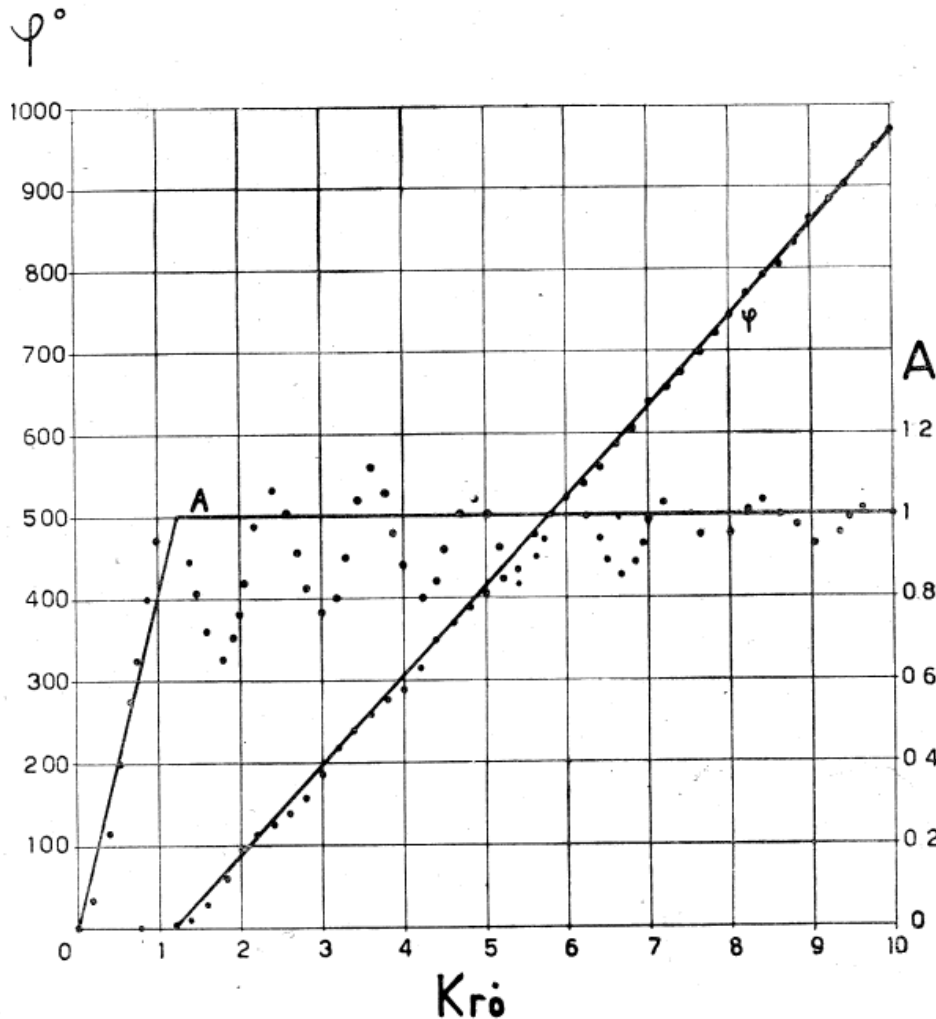


FIG. 1. - Ampiezza e fase (in gradi) della funzione di trasferimento  $F(Kr_0)$ .

in tre parti. La prima va dal valore  $Kr_0$  eguale a zero al valore  $Kr_0$  eguale a 1,2. La ampiezza cresce proporzionalmente alla frequenza dal valore 0 al valore 1. La seconda va dal valore  $Kr_0$  eguale a 1,2 fino al valore 6,2. La fase cresce da 0 a 9,26 radianti e quindi può essere espressa dalla formula:

$$(13) \quad \alpha(Kr_0) = 1.852 Kr_0 - 2,222$$

L'ampiezza può essere eguale a 1, per quanto l'approssimazione sia ovviamente grossolana.

La terza va dal valore  $Kr_0$  eguale a 6,2 fino al valore infinito. L'ampiezza è sensibilmente eguale a 1. La fase è

$$(14) \quad \alpha(Kr_0) = 2 (Kr_0 - 1.57) = 2Kr_0 - 3,14.$$

I valori 1.85 e 2 rappresentano ovviamente in percentuale del tempo  $t_0$  i tempi di ritardo di gruppo per le bande di  $Kr_0$  da 1.2 a 6.2 e da 6.2 a infinito. Questi valori indicano una giustificazione fisica della scomposizione dell'operatore.

Echi dovuti a componenti aventi frequenze corrispondenti a lunghezze d'onda inferiori alla circonferenza della sfera non cominciano a tornare indietro se non quando il fronte d'onda ha progredito già al di là del centro della sfera. Infatti essi tornano indietro al tempo  $t = 0$ . Le frequenze aventi lunghezze d'onda inferiore al raggio della sfera, danno echi anticipati di  $2t_0$ ; per esse l'eco si forma appena il fronte di onda ha colpito la superficie della sfera. Le frequenze aventi lunghezze d'onda comprese fra la circonferenza e il raggio della sfera hanno anticipi di  $1.85 t_0$  che corrispondono all'attimo in cui il fronte d'onda colpisce una superficie avente diametro eguale a circa  $0,75 r_0$ .

La funzione  $\varphi(t)$  può essere quindi ottenuta dalla somma di tre integrali.

Il primo è:

$$(15) \quad \varphi_1(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^{1.2} \frac{A(Kr_0) \operatorname{sen}(Kr_0 \varepsilon)}{Kr_0} d(Kr_0)$$

dove  $A(Kr_0)$  assume il valore 0 per  $Kr_0 = 0$  e 1 per  $Kr_0 = 1.2$ .

Tale integrale può essere valutato secondo la nota formula [4]:

$$(16) \quad \frac{1}{\pi} \int_{w_1}^{w_2} \frac{A(w)}{w} \operatorname{sen} wtdw = \frac{1}{\pi} \frac{\cos w_1 t}{t} (a - b) - \frac{\cos w_2 t}{t} (a + b) + \frac{2b}{(w_2 - w_1)t^2} \cdot (\operatorname{sen} w_2 t - \operatorname{sen} w_1 t)$$

quando  $A(w)$  assume il valore  $a$  per  $\frac{w_1 + w_2}{2}$  e va linearmente da  $a - b$  per  $w = w_1$  ad  $a + b$  per  $w = w_2$ .

Introducendo i valori  $w_1 = 0$   $w_2 = 1.2$ ,  $a = 0.5 = b$  si ha con qualche aggiustamento:

$$(17) \quad \varphi_1(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^{1.2} \frac{A(Kr_0) \operatorname{sen} Kr_0 \varepsilon}{Kr} d(Kr_0) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \left[ \frac{\operatorname{sen} 1.2 \varepsilon}{(1.2 \varepsilon)} - \cos(1.2 \varepsilon) \right]$$

La seconda parte dell'integrale è:

$$(18) \quad \begin{aligned} \varphi_2(\varepsilon) &= \frac{1}{\pi} \int_{1.2}^{6.2} \frac{\operatorname{sen} [Kr_0(\varepsilon + 1.85) - 2.222]}{Kr_0} d(Kr_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{1.2}^{6.2} \frac{\operatorname{sen} [Kr_0(\varepsilon + 1.85)] \cos 2.222}{Kr_0} d(Kr_0) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{1.2}^{6.2} \frac{\cos [Kr_0(\varepsilon + 1.85)] \operatorname{sen} 2.222}{Kr_0} d(Kr_0) \end{aligned}$$

che scrivendo  $\varepsilon_2 = \varepsilon + 1.85$  da:

$$\varphi_2(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \left[ (0.606 \{ Si(6.2 \varepsilon_2) - Si(1.2 \varepsilon_2) \} + 0.7955 \{ Ci(6.2 \varepsilon_2) - Ci(1.2 \varepsilon_2) \} \right]$$

indicando con *Si* il seno integrale e *Ci* il coseno integrale.

La terza parte dell'integrale è, scrivendo  $\varepsilon_3 = \varepsilon + 2$

$$\varphi_3(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{6.2}^{\infty} \frac{\text{sen}[Kr_o(\varepsilon + 2) - 3.14]}{Kr} d(Kr_o) = \frac{1}{\pi} [1.57 - Si(6.2 \varepsilon_3)]$$

I valori di  $\varphi_1(\varepsilon)$ ,  $\varphi_2(\varepsilon_2)$ ,  $\varphi_3(\varepsilon_3)$  sono riportati nelle tre figure 2, 3, 4.

Sommando le tre funzioni si ottiene l'andamento della funzione  $\varphi(\varepsilon)$  che è rap-

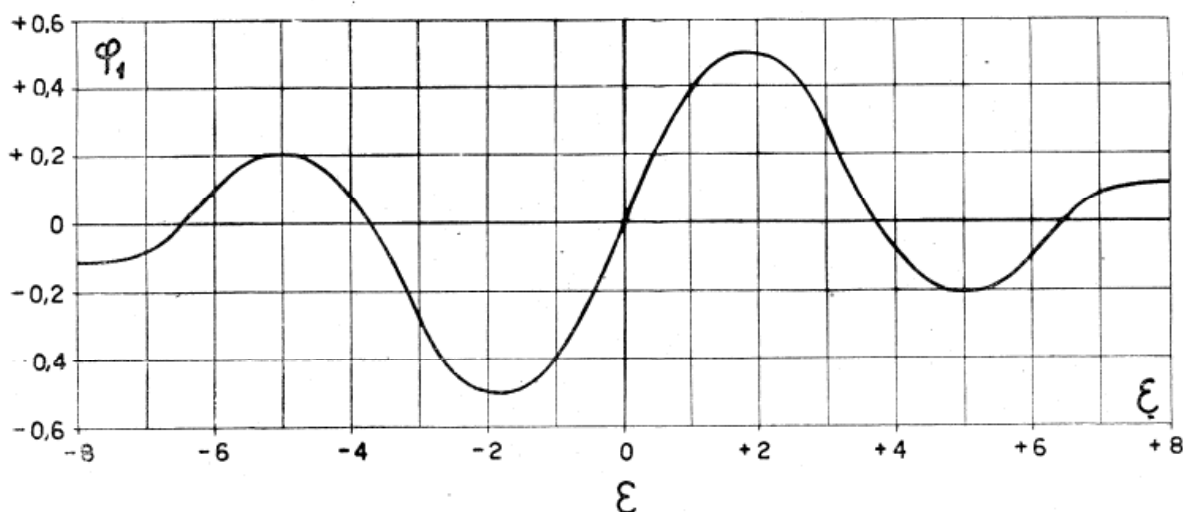


FIG. 2. - Andamento della funzione  $\varphi_1(\varepsilon)$ .

presentato nella fig. 5. Prima del tempo  $\varepsilon = -2$  l'onda sonora non ha ancora colpito la sfera. Quindi la pressione sonora di eco dovrebbe essere nulla per  $\varepsilon = -2$ . Tale condizione, come è noto, è sempre soddisfatta quando l'operatore  $F(j\omega)$  rappresenta un fenomeno reale ed il suo verificarsi costituisce un controllo della correttezza dell'approssimazione [5]. Nel nostro caso essa non è completamente soddisfatta si ha un breve tratto per tempi minori di  $-2$  per i quali  $\varphi(\varepsilon)$  giunge a valori del 10%. Sarebbe ovviamente possibile ritoccano i valori delle fasi ottenere un rispetto formale maggiore della regola. Ma, tenuto conto della grossolanità di alcune approssimazioni, tale errore è già soddisfacente né sarebbe giusto dare l'impressione che il fenomeno è rappresentato con assoluta precisione. La sfera si comporta, per quanto riguarda l'eco riflessa, come un filtro passa alto, cui corrisponde in effetto la sua funzione di riflessione  $F(Kr_o)$ . La frequenza zero viene tagliata completamente e quindi la pressione sonora per tempi molto grandi va a zero. Data peraltro la riflessione totale delle frequenze alte, il transitorio all'origine  $\varepsilon = 2$  viene riprodotto integralmente e si ha un salto istantaneo dal valore di pressione nulla al valore 1. La pressione sonora cala rapidamente, passa per lo zero al tempo  $\varepsilon = -0.6$  ed è seguita da un impulso negativo che ritorna a valori positivi per  $\varepsilon = +3.5$  per estinguersi lentamente.

Il fenomeno assume le ampiezze più importanti nel tempo che va da  $-2 t_o$  a

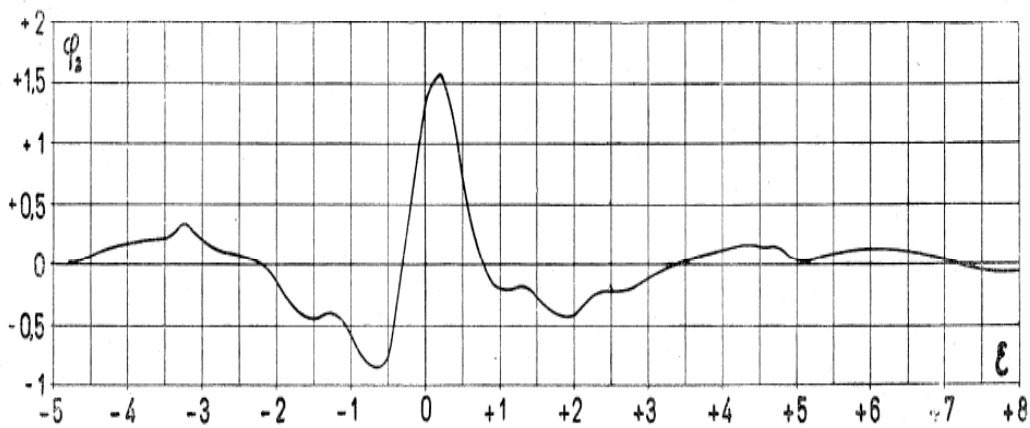


FIG. 3. - Andamento della funzione  $\varphi_2(\epsilon)$ .

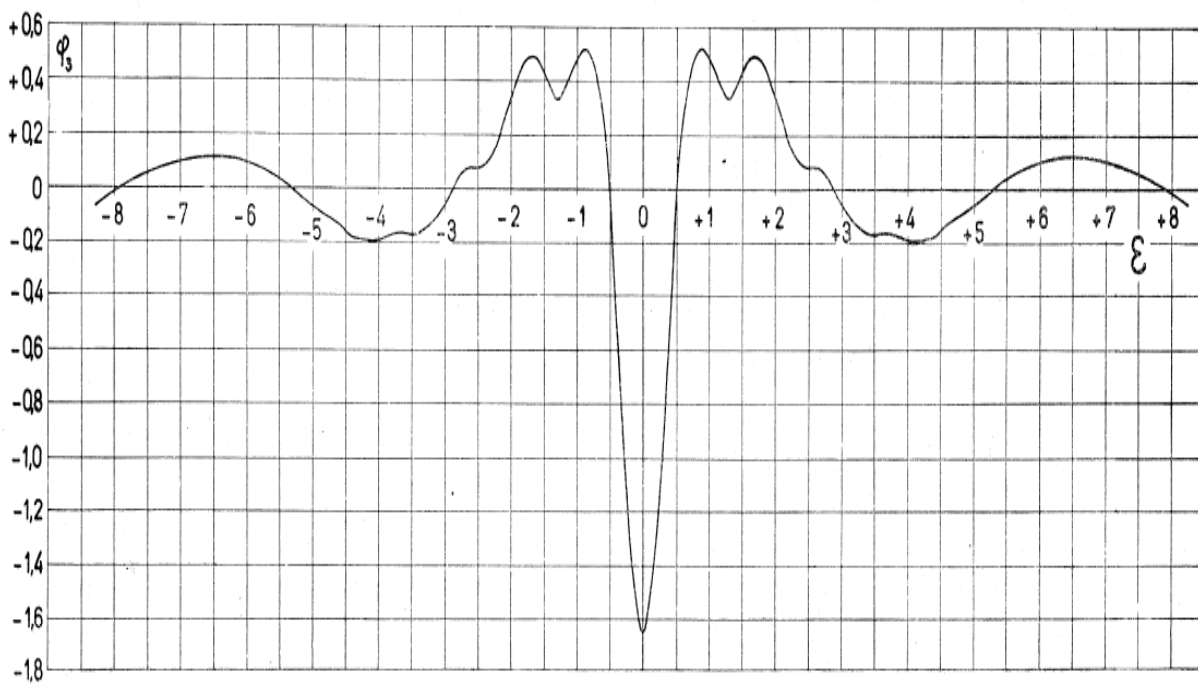


FIG. 4. - Andamento della funzione  $\varphi_3(\epsilon)$ .



$+ 2 t_0$  che corrisponde al tempo che trascorre fra l'arrivo di echi dal fronte della sfera e l'arrivo di echi dalla parte posteriore della sfera. L'onda di pressione discontinua colpendo la sfera produce quindi una pressione riflessa con un andamento caratteristico. Un impulso brevissimo molto simile a quello impulsivo  $Fu(t)$  è facilmente ottenibile attraverso un urto o la deflagrazione di piccole cariche di esplosivo. L'andamento del segnale di ritorno da una sfera colpita da un impulso  $Fu(t)$ , può ricavarsi

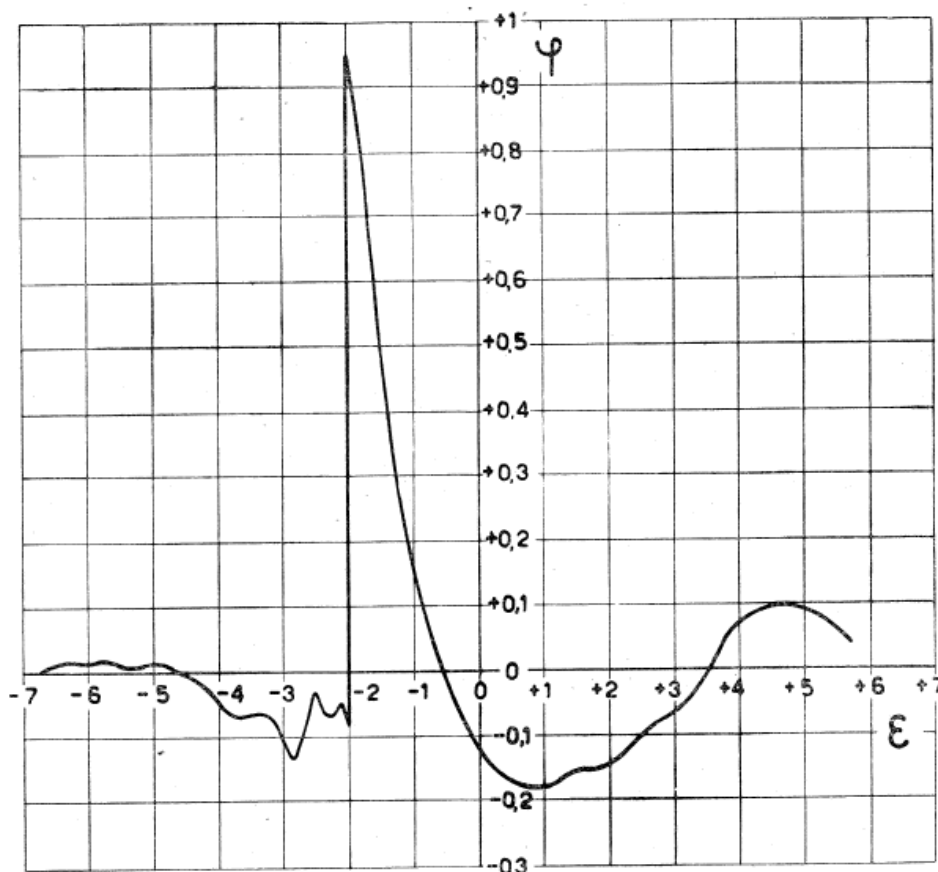


FIG. 5. - Pressione sonora  $\varphi(\epsilon)$  di ritorno da una sfera.

facilmente attraverso derivazione della funzione  $\varphi(t)$ . Da questa per quanto necessariamente approssimata, appare evidente che l'impulso istantaneo di ampiezza infinito si trasforma nell'onda riflessa in un impulso di durata dell'ordine di  $3 t_0$  seguito da una ondulazione di segno opposto che gradualmente si spegne. In un contributo successivo verrà esaminato l'andamento del fenomeno per impulsi di pressione sonora sinusoidale.

Milano, 28 maggio 1958.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] STENZEL, *Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen*, pag. 105.
- [2] STENZEL, *Ueber die von einer starren Kugel hervorgerufene Störung des Schallfeldes*, E.N.T. Bd 15, Heft3, pag. 71.
- [3] A. LEONHARD, *Determination of Transient response from frequency response*. Transactions of the A.S.M.E. Nov. 1954 pag. 1215.
- [4] LEONHARD, loc. cit., pag. 1219.
- [5] LEONHARD, loc. cit., pag. 1217.

## RÉSUMÉ

*L'écho sonore réfléchi par une sphère frappée par une onde du type échelon unité.*

On détermine l'écho sonore renvoyée par une sphère de rayon  $r$  réfléchissant totalement et frappée par une onde sonore représentée par la fonction  $1(t)$  (échelon unité d'Heaviside).

L'opérateur fonctionnel qui donne le rapport entre l'onde sonore réfléchie et l'onde sonore incidente est obtenu au moyen des formules qui donnent l'écho réfléchi par une sphère frappée par une onde sonore sinusoidale et évalué avec un procédé d'approximation. L'onde sonore réfléchie est formée par trois composantes.

La première est due aux harmoniques de la fonction  $1(t)$  qui ont une longueur d'onde plus faible que  $0,2r$  et qui sont réfléchies dès que l'onde sonore incidente touche la sphère.

La deuxième est due aux harmoniques ayant une longueur entre  $0,2r$  et  $r$  et qui semblent être réfléchies dès que l'onde incidente embrasse une surface sur la sphère ayant un diamètre égal à  $0,75r$ .

La troisième est due aux harmoniques ayant longueur d'onde plus élevée que  $r$  et qui sont réfléchies partiellement dès que l'onde incidente a enveloppé la section majeure de la sphère.

L'onde totale réfléchie est une impulsion à forme ondulatoire et qui s'éteint presque totalement quand l'onde a dépassé la sphère.

## SUMMARY

*On the sound wave reflected by a sphere struck by a sound pulse.*

The A. calculates the sound reflection produced by a totally reflecting sphere of radius  $r$  which is struck by a pressure wave of the type  $1(t)$  (Heaviside Function).

From the formulas giving the reflected pressure for a sphere struck by a sinusoidal sound wave the A. obtains the functional operator expressing the ratio between the reflected and the incident wave and evaluates it by an approximation method. It is shown that the reflected sound wave can be considered as due to three partial reflections. The first is due to the harmonics of the function  $1(t)$  having a wavelength smaller than  $0,2r$ , which are reflected as soon as the sound wave impinges on the sphere.

The second is due to the harmonics having a wavelength higher than  $0,2r$  but smaller than  $r$  which are totally reflected when the wave reaches a surface on the sphere having a diameter  $0,75r$ .

The third is due to the waves having a wave length longer than  $r$ , which are partially reflected when the wave reaches the center of the sphere.

The total reflected sound wave is an oscillating pulse which dies out substantially after the sound wave has passed the sphere.

## ZUSAMMENFASSUNG

*Die Reflexion eines Schallimpulses von einer starren Kugel.*

Es wird untersucht die Schallreflexion an einer starren Kugel, des Radius  $r$ , eines Schallimpulses des Types  $1(t)$  (Einheitssprung). Der Uebertragungsfaktor zwischen einfallenden und reflektierten Schalldruck wird durch die Formeln der Schallreflexion für einen sinusförmigen Schalldruck als Linearoperator berechnet und mittels Annäherungsmethoden bewertet.

Die reflectierte Schallwelle besteht aus drei Teilen. Der erste ist von den Teilschwingungen des Einheitssprunges einer Wellenlänge höher als  $0,2r$  gebildet. Diese Teilschwingungen werden reflectiert sobald die einfallende Schallwelle die Kugel berührt. Der zweite besteht aus Teilschwingungen deren Wellenlänge zwischen  $0,2r$  und  $r$  schwankt und wird reflectiert sobald die einfallende Welle eine Oberfläche des Diameters  $0,75r$  erreicht. Der dritte Teil besteht aus Teilschwingungen der Wellenlänge höher als  $r$ , die reflectiert werden nachdem die einfallende Schallwelle das Kugelzentrum überschritten hat.

Die totale reflectierte Schallwelle ist ein schwingender Impuls der allmählich verwindet nachdem die einfallende Welle die Kugel überschritten hat.